EESTI

MATEMAATIKA SELTS

AASTARAAMAT
2013-2016

EESTI MATEMAATIKA SELTS AASTARAAMAT 2013-2016

EESTI MATEMAATIKA SELTS

AASTARAAMAT 2013–2016

Tartu 2017

EESTI MATEMAATIKA SELTS
J. Liivi 2, 50409 Tartu, Eesti
e-post: valdis.laan@ut.ee
http://www.matemaatika.eu/

Toimetajad: Valdis Laan, Uno Hämarik

ISSN 1406-4316

Trükkinud: OÜ Paar

Sisukord

In memoriam

Koolimatemaatika

Konverentsid ja seminarid

Preemiad ja autasud

Varia

Contents

In memoriam

School mathematics

Conferences and seminars

Prizes and awards

Varia

Saateks

Käesoleva aastaraamatu koostamisel püüdsime arvesse võtta aastakümnete jooksul väljakujunenud traditsioone. Aastaraamat püüab pakkuda põnevat lugemist matemaatikast, koolimatemaatikast, matemaatikutest (nii elavatest kui lahkunutest) ja matemaatikasündmustest.

Käesolev aastaraamat sisaldab materjali nelja aasta (2013–2016) kohta. Meile tundus lihtsam panna kokku üks mahukam raamat kui neli eraldiseisvat raamatut. Kuna mõned artiklid kajastavad juba mitme aasta taguseid sündmusi, siis ei pruugi nad enam väga päevakajalistena tunduda, samas aastaraamatu üks eesmärke on alati olnud ka kroonika jäädvustamine järeltulevatele põlvedele.

See aastaraamat on rõhutatult Eesti-keskne. Tänapäeva infokanalitest võib leida palju materjali laia maailma matemaatikakuulsuste ja -sündmuste kohta. Samas Eesti matemaatika kajastamine on just Eesti Matemaatika Seltsi ülesanne ja teised seda meie eest tegema ei tule.

Neid inimesi, kes meile aastaraamatu koostamisel abiks olid, on väga suur hulk ja neid kõiki üles lugeda ei jõua. Suur-suur tänu kõigile autoritele! Soovime tänada ka Andi Kivinukka, kes toimetamisel abistas.

Loodame, et igaüks leiab aastaraamatust endale midagi huvitavat. Meeldivat lugemist!

Aastaraamatu koostajad

MATEMAATIKA

Kunstliku baasi meetodi uus versioon lineaarses planeerimises

Evald Übi, Jaan Übi
Tallinna Tehnikaülikool

Töös on kirjeldatud suure M-meetodi uut varianti, kus selle parameetri määramine on oluliselt lihtsam kui klassikalisel juhul. Lähteülesande sihifunktsioonile lisatakse üks täiendav muutuja, mille optimaalse väärtuse korral on täidetud kõik selle ülesande kitsendused. Koostatakse lisakitsendus kunstlike muutujate kohta, mis garanteerib nende lahkumise baasist. Kui optimaalne lahend on olemas, siis esitatava meetodi kasutamiseks tuleb klassikalist simpleksalgoritmi muuta ainult vähesel määral.

1. Sissejuhatus

Paljude asjatundjate arvates on simpleksalgoritm operatsioonianalüüsi kõige efektiivsem meetod. Seda kasutatakse kogu maailmas tuhandeid kordi päevas rongide, lennukite ja laevade sõiduplaanide koostamisel, äritegevuse optimeerimiseks, kütusesegude koostamisel jm, vt [1]. Öeldakse isegi, et simpleksalgoritm juhib maailma.

Simpleksmeetodi täiustamine on endiselt päevakorras. Eelmise sajandi kaheksakümnendatel aastatel algas intensiivne iteratiivsete lahendusalgoritmide uurimine. Nende kaht tüüpi lahendusmeetodite võrdlemine ja täiustamine jätkub ka käesoleval ajal. Sellele vaatamata leiab kõige rohkem praktikas rakendust kaheetapiline simpleksmeetodi variant. Klassikalise M-meetodi kõige raskem küsimus on selle trahvikordaja etteandmine. Lahendatud näidete põhjal võime väita, et lisakitsenduse kasutamine lihtsustab olulisel määral parameetri M määramist.

Vähimruutude meetodi kasutamist alglahendi leidmiseks on vaadeldud G. Dantzigi ja kaasautorite töös [5], samuti käesoleva kirjutise ühe autori artiklites [3, 4, 6]. Viimases kirjeldatud meetodiga leitud alglahend võib osutuda optimaalseks.

Töös kirjeldame esmalt vaadeldavat algoritmi. Selle rakendamise näited on toodud kolmandas osas eeldusel, et ülesandel on tõkestatud optimaalne lahend. Kui see eeldus pole täidetud, siis lisakitsendusega ülesande sihifunktsioon on tõkestamata. Selliseid ülesandeid vaatleme neljandas ja viiendas osas.

Käesoleva töö põhieesmärk on täiustada kunstliku baasi meetodit ühe kitsenduse lisamise kaudu.

2. Uus kunstliku baasi meetodi versioon

Vaatleme lineaarse planeerimise ülesannet kujul

$$
\begin{aligned}
z = (c, x) := \sum c_i x_i &\to max \\
Ax &= b, \\
x &\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ja selle duaalülesannet

$$
\begin{aligned}
w = (y, b) &\to min \\
yA &\geqslant c,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

kus A on $m \times n$ maatriks, b ja y on m-vektorid, x ja c on n-vektorid.

Kui klassikalise kunstliku baasi meetodi korral on täidetud võrratused

$$y_i \leqslant M, \ i = 1, ..., m, \tag{3}$$

kus M on küllalt suur etteantud konstant, ja duaalülesande kitsendused, siis on leitud ülesannete optimaalsed lahendid, vt [2].

Viiendas osas vaatleme erijuhtu, kus parem pool $b = 0$.

Eeldus 1.1 Ülesandes (1) on kõik paremad pooled mittenegatiivsed, vektor $b \geqslant 0$.

Võtame kasutusele mittenegatiivsed abimuutujad $u = (u_1, \ldots, u_n)$, kunstlikud muutujad $v = (v_1, ..., v_m), v_{m+1}$ ja muutuja t. Koostame lineaarse planeerimise ülesande

$$z_1 = (c, u) - M \sum v_i - M v_{m+1} \to max$$

$$Au + v - tb = 0, \tag{4}$$

$$\sum v_i + v_{m+1} + t = 1$$

$$u, v, t \geqslant 0,$$

kus M on piisavalt suur positiivne arv.

Kui selle ülesande lahendamisel saime valitud M korral lõpliku z_{1max} ja

$$v_1 = v_2 = v_m = v_{m+1} = 0, \quad t > 0,$$

siis lähteülesande (1) optimaalne lahend avaldub kujul $x = u/t$. Vastuoluliste kitsendustega või tõkestamata sihifunktsiooniga ülesandeid vaatleme neljandas ja viiendas osas.

Kõrvaldame ülesande (4) sihifunktsioonist kunstlikud muutujad, kasutades selleks viimast kitsendust:

$$z_2 = (c, u) + Mt \to max$$

$$Au + v - tb = 0, \tag{5}$$

$$\sum v_i + v_{m+1} + t = 1$$

$$u, v, t \geqslant 0.$$

Sellel laiendatud ülesandel on alati lubatav lahend $v_{m+1} = 1$, ülejäänud muutujad võrduvad nulliga. Koostame laiendatud ülesandele vastava duaalülesande

$$w_2 = y_{m+1} \to min,$$

$$(y, A_j) \geqslant c_j, \; j = 1, ..., n \tag{6}$$

$$y_i + y_{m+1} \geqslant 0$$

$$i = 1, ..., m$$

$$-(y, b) + y_{m+1} \geqslant M$$

$$y_{m+1} \geqslant 0,$$

kus A_j on j-s veerg maatriksis A. Olgu $x*$ ja $y*$ ülesannete (1) ja (2) optimaalsed lahendid, olgu täidetud eeldus 1.1 ja võtame $u* = x*, t* = 1, y_{m+1} = M + (y*, b)$. Kui parameeter M on piisavalt suur, siis on täidetud kõik duaalülesande (6) kitsendused ja sihifunktsioonide optimaalsed väärtused võrduvad,

$$w_2 = y_{m+1} = M + (y*, b) = z_2 = (c, u*) + M. \tag{7}$$

Seega on muutujad $u*, t*, y*, y_{m+1}$ ülesannete (5) ja (6) optimaalsed lahendid ja kuna $t* = 1$, siis kõik kunstlikud muutujad võrduvad nulliga.

Eelduse 1.1 korral kehtib ka vastupidine väide: kui lisakitsendusega ülesande (5) optimaalses lahendis $t* = 1$, siis kunstlikud muutujad on lahkunud baasist ja piisavalt suure M korral on täidetud kõik duaalülesande (6) kitsendused. Ülesannete (5)–(6) sihifunktsioonide võrdsusest järeldub sama väide ka ülesannete (1) ja (2) kohta. Kõik eelöeldu kehtib ka siis, kui ülesannete (1)–(2) optimaalsed lahendid pole ühesed.

Seega lahendades laiendatud ülesande (5) piisavalt suure M korral, kui optimaalses lahendis kehtib ligikaudne võrdus $t = 1$, oleme saanud ka lähteülesande optimaalse lahendi $x = u/t$.

3. Meetodi kasutamise näited

Näide 3.1. Vaatleme ülesannet

$$z = -4x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 \to max$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

$$x \geqslant 0.$$

Koostame ülesande (5):

$$\begin{gathered}
z_1 = -4u_1 - u_2 - 5u_3 + u_4 + Mt \to max \\
u_1 + 3u_2 + u_3 + u_4 + v_1 \quad - 6t = 0 \\
-u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \quad + v_2 - 4t = 0 \\
v_1 + v_2 + v_3 + t = 1 \\
u, v, t \geqslant 0.
\end{gathered}$$

Lahendame selle ülesande modifitseeritud simpleksmeetodiga $M = 0$ korral. Lähtume töös [2] toodud selle meetodi kirjeldusest.

c	var	val	1	2	3	.
0	v_1	0	1	0	0	1
0	v_2	0	0	1	0	1
0	v_3	1	-1	-1	1	-2
	z_1, y	0	0	0	0	-1

Tabel 1

c	var	val	1	2	3	.
0	v_1	0	1	-1	0	-2
1	u_4	0	0	1	0	-4
0	v_3	1	-1	1	1	3
	z_1, y	0	0	1	0	-4

Tabel 2.

c	var	val	1	2	3	.
0	v_1	2/3	1/3	-1/3	2/3	2/3
1	u_4	4/3	-4/3	7/3	4/3	-5/3
0	t	1/3	-1/3	1/3	1/3	-2/3
	z_1, y	4/3	-4/3	7/3	4/3	-2/3

Tabel 3.

c	var	val	1	2	3
-1	u_2	1	1/2	-1/2	1
1	u_4	3	-1/2	3/2	3
0	t	1	0	0	1
	z_1, y	2	-1	2	2

Tabel 4.

Tabelite 1–3 viimase rea viimane element võrdub baasiväliste muutujate minimaalse hinnanguga. Esimeses tabelis on see muutuja u_4 jaoks $r_4 = -1$, teises tabelis t jaoks -4 jne. Laiendatud ülesande (5) optimaalne lahend $u = (0, 1, 0, 3)^T, t = 1$ ja lähteülesande (1) lahend $x = u/t = (0, 1, 0, 3)^T$.

Näide 3.2. Olgu

$$A, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & -1 & 5 & 10 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1, & -1, & -3, & -1.5, & 0.1 \end{pmatrix}$$

Selle ülesande optimaalne lahend on $x = (2, 0, 0, 4/3, 2/3)^T$, $z_{max} = 2/30$. Kui $M = 0.1$ korral koostada laiendatud ülesanne (5), siis optimaalses baasis on üks kunstlik muutuja,
$u = (0,317; 0; 0; 0; 0,0317)^T, v_1 = 0,857, t = 0,143$. Aga $M = 4$ korral saame lahendi $u = (2, 0, 0, 4/3, 2/3), t = 1$, kus kunstlikud muutujad võrduvad nulliga. Võib näidata et kunstlikud muutujad pole optimaalses baasis, kui kehtib võrratus $8/27 < M$.

Märkus 3.1. Sarnaselt viimase näitega võib ülesandes (5) olla optimaalses baasis mõni kunstlik muutuja positiivse väärtusega, kui parameeter M pole piisavalt suur. Et see parameeter ei peaks olema väga suur, tuleb kitsenduste abil suurendada sihifunktsiooni maksimumi. Selles näites liidame sihivektorile kitsenduste maatriksi teise rea, siis ülesande (5) lahendamisel parameetri $M = 0.1$ korral pole optimaalses baasis enam kunstlikke muutujaid. Vektorile c liitmise asemel saame optimaalse lahendi $M = 0.1$ korral ka siis, kui jagame seda vektorit arvuga 10. Kui lähteülesandel (1) on optimaalne lahend, siis duaalülesandes (6) on kitsendus

$$-(y,b) + y_{m+1} \geqslant M$$

täidetud kui võrdus. Selle ülesande kitsenduses

$$y_i + y_{m+1} = y_i + M + (y,b) = y_i + M + z_{max} \geqslant 0$$

ei pea trahvikordaja M olema suur, kui eelnevalt on kitsenduste abil suurendatud z_{max} või vähendatud sihivektori normi. Kui ülesandes on veel kitsendused

$$alumine \leqslant x \leqslant ulemine,$$

siis on lihtsam hinnata sihifunktsiooni maksimumi. Kui ülesandel (1) on olemas optimaalne lahend, siis piisavalt suure M korral muutub selle parameetri kasvamisel vaid y_{m+1}, ülejäänud duaalmuutujad jäävad samaks.

Märkus 3.2. Eellahendamise käigus tuleb muuta sihivektori normi või nende kitsenduste abil, kus $b_i > 0$, suurendada lähteülesande sihifunktsiooni optimaalset väärtust. Kui muuta sihivektorit, liites sellele teguriga s korrutatud kitsenduste maatriksi mingi rea, siis suurenevad mõlema ülesande sihifunktsioonid sb_i võrra. Samaaegselt suureneb ka duaalülesande kitsenduse $y_i + y_{m+1} \geqslant 0$ vasak pool sb_i võrra.

Näide 3.2. Vaatleme ülesannet

$$z = -x_1 + 2x_2 \to max$$

$$2x_1 - 10x_2 \geqslant 5$$

$$x_1 - 9x_2 \leqslant 2$$

$$x \geqslant 0.$$

Selles ülesandes pole ei primaalselt ega duaalselt lubatavat alglahendit ja $z_{max} = -23/8 < 0$. Kasutame kaht kunstlikku muutujat ja võtame $M = 4$.

$$\begin{aligned} z_1 = -u_1 + 2u_2 + 4t \to max \\ 2u_1 - 10u_2 - u_3 \quad + v_1 \quad - 5t = 0 \\ u_1 - 9u_2 \quad + u_4 \quad - 2t = 0 \\ v_1 + v_2 + t = 1 \\ u, v, t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Selle ülesande optimaalsele lahendile $u = (25/8,\, 1/8,\, 0,\, 0)^T$, $v_1 = v_2 = 0$, $t = 1$ vastab lähteülesandes $x = (25/8,\, 1/8)^T$. Aga väärtus $M = 3$ pole piisav, sest siis on v_1 optimaalses baasis.

4. Vastuolulised kitsendused

Teoreem 4.1. *Kui lähteülesande (1) kitsendused on vastuolulised, siis laiendatud ülesande (5) sihifunktsioon on tõkestamata.*

Oletame vastuväiteliselt, et ülesandel (5) on tõkestatud optimaalne lahend. Siis duaalülesande (6) optimaalne lahend rahuldab kitsendusi $yA \geqslant c$. Seega pole duaalülesande (2) kitsendused vastuolulised ja võrrandist $y_{m+1} = M + (y, b)$ saame, et ülesannete (1) ja (2) sihifunktsioonid on tõkestatud. Aga see on vastuolus teoreemi eeldusega.

Näide 4.1. Vaatleme ülesannet

$$\begin{aligned} z = 2x_1 - x_2 \to max \\ x_1 - x_2 + x_3 \quad = 2 \\ x_1 - x_2 \quad - x_4 = 3 \\ x \geqslant 0. \end{aligned}$$

Selle vastuoluliste kitsendustega ülesande jaoks koostame laiendatud ülesande (5), algbaasi moodustavad muutujad u_3, v_1, v_2. Parameetri $M = 1$ korral on toodud kolmas simplekstabel.

c	var	val	1	2	3	.
0	t	1/2	1/2	-1/2	1/2	0
2	u_1	1	2	-1	1	-1
0	v_1	1/2	-1/2	1/2	1/2	0
	z_1, y	2	4	-2	2	-1

Tabel 5

Baasi tuleb minimaalse hinnangu $r_2 = -1$ põhjal muutuja u_2, ja viimase veeru järgi on ülesandes (3) sihifunktsioon tõkestamata. Aga kuna üks kunstlik muutuja on baasis, siis pole leitud lahend lähteülesande jaoks lubatav.

Nüüd algab **lahendamise teine etapp** uue sihifunktsiooniga

$$z_3 = t - M \sum v_i \to max. \tag{8}$$

Valime jälle parameetri väärtuse $M = 1$ ja lähtume viimasel sammul arvutatud simplekstabelist.

c	var	val	1	2	3
1	t	1/2	1/2	-1/2	1/2
0	u1	1	2	-1	1
-1	v1	1/2	-1/2	1/2	1/2
	z1,y	0	1	-1	0

Tabel 6

Kuna kõik hinnangud $r_i \geqslant 0$, siis lähteülesande kitsendused on vastuolulised, sest pole võimalik viia üht kunstlikku muutujat baasist välja.

Märkus 4.1. Kui laiendatud ülesande (5) sihifunktsioon on tõkestamata, siis ülesanne (1) on vastuoluline või selle sihifunktsioon tõkestamata. Kunstlike muutujate optimaalsed väärtused sihifunktsiooni (8) korral iseloomustavad vastuolu suurust lähteülesandes. Kui need kunstlikud muutujad on optimaalses baasis ja võrduvad nulliga arvutustäpsuse piires, siis võivad lähteülesande kitsendused mitte olla vastuolulised, vt näidet 4.2. Vastasel korral, nagu näites 4.1 on ülesanne vastuoluline. Järelikult pole teine etapp kohustuslik, see on vajalik vaid selgitamaks, kas kitsendused on vastuolulised või sihifunktsioon tõkestamata. Teist lahendusvarianti vastuoluliste kitsenduste või tõkestamata sihifunktsiooni korral on vaadeldud märkuses 5.1.

Näide 4.2. Ülesande

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 6$$

$$x \geqslant 0$$

lahendamisel saame $u = (0, 6, 0)^T, t = 1$, baasis on ka kunstlik muutuja $v_2 = 2E - 18$.

5. Tõkestamata sihifunktsioon

Kui lähteülesande sihifunktsioon on tõkestamata, siis on nii ka laiendatud ülesandes (5).

Näide 5.1. Vaatleme ülesannet

$$z = 4x_1 - 3x_2 \to max$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$$

$$x \geqslant 0.$$

Koostame laiendatud ülesande (5), algbaasi moodustavad muutujad v_1, v_2, v_3. Parameetri $M = 1$ korral on toodud neljas simplekstabel.

c	var	val	1	2	3	.
0	t	1/2	1/2	-1/2	1/2	0
4	u_1	1/2	3/2	-1/2	1/2	-1
0	v_2	1/2	-1/2	1/2	1/2	0
	z_1, y	2	6	-2	2	-1

Tabel 7

Hinnangu $r_2 = -1$ põhjal tuleb baasi muutuja u_2, ja viimase veeru põhjal on sihifunktsioon tõkestamata. Nüüd jätkame, kasutades sihifunktsiooni (8) mingi lubatava lahendi leidmiseks.

c	var	val	1	2	3	.
1	t	1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2
0	u1	1/2	3/2	-1/2	1/2	1/2
-2	v2	1/2	-1/2	1/2	1/2	1/2
	z1,y	0	3/2	-3/2	-1/2	-3/2

Tabel 8

c	var	val	1	2	3
1	t	1	0	0	1
0	u1	0	2	-1	0
0	u4	1	-1	1	1
	z1,y	1	0	0	1

Tabel 9

Leitud lahend $u = (0,0,0,1)^T, t = 1$ rahuldab laiendatud ülesande ja $x = (0,0,0,1)^T$ lähteülesande kitsendusi. Järelikult viimane ülesanne pole vastuoluline, lähteülesande sihifunktsioon on tõkestamata.

Märkus 5.1. Teine võimalus ülesande lahendamiseks tõkestamata sihifunktsiooni või vastuoluliste kitsenduste korral seisneb veel ühe muutuja ja ühe kitsenduse lisamises kõikide muutujate summa kohta. Näites 5.1 oleks see kujul

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = N,$$

kus N on piisavalt suur arv. Tõkestamata sihifunktsiooni korral saab kahe lisakitsendusega ülesande optimaalse lahendi abil määrata, milliste baasimuutujate korral kasvab sihifunktsioon tõkestamatult. See kitsendus ei muuda lõppvastust, kui lähteülesanne on vastuoluline.

Lõpuks vaatleme erikuju, kui kõik paremad pooled $b = 0$.

Näide 5.2.

$$z = 2x_1 - x_2 - 6x_3 \to max$$

$$3x_1 - 3x_2 - 6x_3 \quad = 0$$

$$-2x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 = 0$$

$$x \geqslant 0.$$

Koostame laiendatud ülesande (5), esimesele kitsendusele lisame kunstliku muutuja v_1, lisakitsendusele vastab v_2:

$$z_1 = 2u_1 - u_2 - 6u_3 \to max$$

$$3u_1 - 3u_2 - 6u_3 \quad + v_1 \quad = 0$$

$$-2u_1 + u_2 + 9u_3 + u_4 = 0$$

$$v_1 + v_2 = 0$$

$$u, v \geqslant 0.$$

Simpleksmeetodiga lahendamisel näeme, et sihifunktsioon on tõkestamata. Järelikult on see nii ka lähteülesandes. Kui aga muuta tingimusi, võtta näiteks $c_1 = 0,5$ siis on lähteülesande optimaalne lahend $x = 0, z_{max} = 0$.

6. Kokkuvõte

Töös kirjeldatud M-meetodi versiooni korral lisatakse ülesandele üks kitsendus. Olemasolevaid simpleksalgoritmi programme tuleb muuta ainult vähesel määral. Vastuoluliste kitsendustega või tõkestamata sihifunktsiooni korral on laiendatud ülesande sihifunktsioon tõkestamata. Sel juhul pole tingimata vaja lahendada teise etapi ülesannet (8), vaid tuleb korrigeerida lähteülesande andmeid.

Kirjandus

[1] www.Forte.ee, *Algoritm, mis juhib maailma.*

[2] D.G. Luenberger, *Linear and nonlinear programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 2003.

[3] E. Übi, *Mathematical programming via the least squares method*, Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), 795–806.

[4] E. Übi, K. Keres, *Rakendusmatemaatika*, TTÜ Kirjastus, 2013.

[5] G. Dantzig, M. Thapa, *Linear programming 2: Theory and Extensions*, Standford, 2003.

[6] E. Übi, *Linear inequalities via least squares*, Proc. Est. Acad. Sci. **62** (2013), 238–248.

Kompleksarvud ja pöörded tasandil (miks see füüsikas nii vajalik on)

Maido Rahula
Tartu Ülikool

1. Euleri valemid

On olemas kolm *ühikut*: naturaalarv 1, imaginaarühik i omadusega $i^2 = -1$ ja sümbol j, millel polegi õiget nime, kuid tema omaduseks on $j^2 = 1$. Seame nendele vastavusse kolm 2. järku maatriksit E, I, J,

$$(1, i, j) \quad \rightsquigarrow \quad (E, I, J),$$
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maatrikseil I ja J on samasugused omadused, mis ühikutel i ja j:

$$i^2 = -1,\ j^2 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad I^2 = -E,\ J^2 = E.$$

Kehtivad tuntud valemid

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t, \qquad e^{jt} = \cosh t + j \sinh t} \tag{1}$$

ning sellised valemid kehtivad ka maatriksite It ja Jt eksponentsiaalide puhul:

$$\boxed{e^{It} = E \cos t + I \sin t, \qquad e^{Jt} = E \cosh t + J \sinh t.} \tag{2}$$

Kõiki nelja valemit (1) ja (2) nimetame *Euleri valemiteks*, kuigi tegelikult Euleri valemi all tuntakse vaid valemit $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Vihje Euleri valemite tõestuseks. Valemid (1) tõestame järgmise skeemi järgi (arutlused jätame lugejale; mainime vaid, et rida e^x koondub absoluutselt ja selletõttu saab teda esitatada kahe rea summana):

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \\
&= \Big(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\Big) + \Big(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\Big), \\
x = it \rightsquigarrow e^{it} &= \Big(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \ldots\Big) + i\Big(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots\Big) = \cos t + i \sin t, \\
x = jt \rightsquigarrow e^{jt} &= \Big(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \ldots\Big) + j\Big(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots\Big) = \cosh t + j \sinh t.
\end{aligned}$$

Sama skeemi järgi tõestame valemid (2).

Esitame valemid (2) maatrikskujul

$$e^{It} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}, \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Sellisel kujul näeme, et iga eksponentsiaal e^{It} ja e^{Jt} määrab lineaarrühmas $GL(2,\mathbb{R})$ 1-parameetrilise alamrühma, ehk ka kõverjoone, mille puutujavektoriks rühma ühikus E on Lie algebra $gl(2,\mathbb{R})$ element, kas I või J,

$$I,\ J \in gl(2,\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad e^{It},\ e^{Jt} \in GL(2,\mathbb{R}).$$

Rühma $GL(2,\mathbb{R})$ toimeks tasandil on *tsentroafiinsed teisendused.*

2. Lineaarne vektorväli ja lineaarne voog

Tasandi koordinaatfunktsioonid (u,v) määravad üheaegselt *naturaalse baasi* – osatuletiste operaatoritest *reeperi* ja diferentsiaalidest duaalse *koreeperi.* Kasutame veerumaatrikseid U, U', dU ja reamaatriksit ∂_U,

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad U' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}, \quad dU = \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}, \quad \partial_U = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Baasi (∂_U, dU) duaalsus tähendab võrdust $dU(\partial_U) = E$.

Kõneleme vektorväljadest. Vektorväli X reeperis ∂_U on määratud komponentidega (x, y), mis on koordinaatide (u, v) siledad funktsioonid[1]. Seega vektorväli X on diferentsiaaloperaator ja seda võib rakendada funktsioonile f. Tulemuseks on tuletis Xf ehk lihtsamas tähistuses[2] f',

$$X = x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}, \quad f' = x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Rakendades vektorvälja X koordinaatfunktsioonidele saame tulemuseks vektorvälja komponendid (x, y):

$$\begin{cases} u' = x(u, v) \\ v' = y(u, v). \end{cases} \tag{4}$$

Vektorvälja iseennast on hea esitada ka maatrikskujul:

$$X = \partial_U U'.$$

Samas on tegu diferentsiaalvõrrandite süsteemiga (4). Selle lahend määrab *voo*[3] $a_t = \exp tX$ ning ka iga *punkti* (u, v) *trajektoori* (u_t, v_t) voos a_t.

Erilist huvi pakub *lineaarne vektorväli* X, kui tema komponendid U' on koordinaatide U lineaarfunktsioonid, st $U' = CU$, kus C on konstantne 2. järku maatriks. Võrdus $U' = CU$ on siin süsteem (4) ja selle lahendi määrab antud juhul maatriksi Ct eksponentsiaal:

$$\boxed{U' = CU \ \Rightarrow\ U_t = e^{Ct}U.}$$

Erijuhul maatriks C võib olla kas maatriks I või ka maatriks J. Esimesel juhul süsteemi $U' = IU$ lahendiks on $U_t = e^{It}U$ ja sellest järeldub süsteem $U'' + U = 0$, mille lahendiks omakorda on $U_t = U\cos t + U'\sin t$; teisel juhul süsteemi $U' = JU$ lahendiks on

[1] Vektorväljadega saab lähemalt tutvuda raamatust [1]. Siledus tähendab diferentseeruvust.

[2] Sobiv on kasutada priime, kui teame, millise vektorvälja suhtes diferentseerimine toimub.

[3] Voog a_t on tasandi teisenduste 1-parameetriline rühm.

$U_t = e^{Jt}U$ ja sellest järeldub süsteem $U'' - U = 0$, mille lahendiks on omakorda $U_t = U \cosh t + U' \sinh t$. Mängu tulevad Euleri valemid (2):

a) $C = I$, $U' = IU$, $U'' + U = 0$, $U_t = e^{It}U = U \cos t + U' \sin t$,

$$\begin{cases} u_t = u \cos t - v \sin t \\ v_t = u \sin t + v \cos t, \end{cases} \qquad u_t^2 + v_t^2 = u^2 + v^2,$$

b) $C = J$, $U' = JU$, $U'' - U = 0$, $U_t = e^{Jt}U = U \cosh t + U' \sinh t$,

$$\begin{cases} u_t = u \cosh t + v \sinh t \\ v_t = u \sinh t + v \cosh t, \end{cases} \qquad u_t^2 - v_t^2 = u^2 - v^2.$$

Juhul a) on tegemist vektorväljaga

$$X = -v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v},$$

mille trajektoorideks on ringjooned ning invariandiks on funktsioon $u^2 + v^2$; tasandil uv toimib *elliptiline pööre*[4].

Juhul b) on tegemist vektorväljaga

$$X = v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v},$$

mille trajektoorideks on hüperboolid ja invariandiks on funktsioon $u^2 - v^2$; tasandil uv toimib *hüperboolne pööre.*

Süsteemid a) ja b) kirjutame lahti, et lihtsam oleks täpsustada eksponentsiaalide e^{It} ja e^{Jt} esitusi uv-tasandil, vt (3):

$$\begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}.$$

Üldjuhul maatriks C erineb maatrikseist I ja J, kuid peamiseks jäävad siiski elliptilised ja hüperboolsed pöörded, mida üldjuhul võib mõjutada *homoteetia* – tasandi paisumine või kahanemine.

[4] Afiinsel tasandil tuleb rääkida ellipsitest, kuna ringjoone mõistet seal pole.

3. Klassifikatsioon: fookused, sadulad, sõlmed

Esineb kolm erinevat tüüpi lineaarseid vektorvälju tasandil. Lineaarsel vektorväljal on 0-punktis iseärasus (singulaarsus) ja selle punkti läheduses trajektoorid moodustavad nn *faasiportree* – kas *fookuse, sadula* või *sõlme*. Uurime neid singulaarsusi lähemalt.

Maatriksil C on selle *determinant*, *jälg* – peadiagonaali elementide summa, ning ruutvõrrandi $\det(C-\lambda E)=0$ lahendid – maatriksi C *omaväärtused* λ_1 ja λ_2 :

$$C, \qquad \det C, \qquad \operatorname{tr} C,$$
$$\det(C-\lambda E)=\lambda^2-\lambda \operatorname{tr} C+\det C,$$
$$\lambda_1+\lambda_2=\operatorname{tr} C, \qquad \lambda_1\lambda_2=\det C.$$

Kehtivad *Viete'i valemid* – omaväärtuste summa võrdub jäljega ja korrutis determinandiga. Ruutvõrrandi diskriminandi esitame kujul

$$\Delta=\frac{1}{4}\operatorname{tr}^2 C-\det C=\Big(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{4}\Big)^2.$$

Sõltuvalt diskriminandi märgist esineb kolm juhtu: omaväärtused on kas kaaskomplekssed, reaalsed erinevad või võrdsed. Igal juhul eksponentsiaal e^{Ct} avaldub omamoodi:

1) $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, $\operatorname{tr} C=2\alpha$, $\det C=\alpha^2+\beta^2$, $\Delta=-\beta^2$,

$$e^{Ct}=e^{\alpha t}\Big\{E\cos\beta t+(C-\alpha E)\,\frac{\sin\beta t}{\beta}\Big\},$$

2) $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta$, $\operatorname{tr} C=2\alpha$, $\det C=\alpha^2-\beta^2$, $\Delta=\beta^2$,

$$e^{Ct}=e^{\alpha t}\Big\{E\cosh\beta t+(C-\alpha E)\,\frac{\sinh\beta t}{\beta}\Big\},$$

3) $\lambda_1=\lambda_2=\alpha$, $\operatorname{tr} C=2\alpha$, $\det C=\alpha^2$, $\Delta=0$,

$$e^{Ct}=e^{\alpha t}\Big\{E+(C-\alpha E)\,t\Big\}.$$

Vihje tõestuseks. Esiteks, võttes arvesse $e^{\alpha Et} = e^{\alpha t}E$, kirjutame

$$e^{Ct} = e^{\alpha Et}e^{(C-\alpha E)t} = e^{\alpha t}e^{(C-\alpha E)t};$$

teiseks, märkame $(C - \alpha E)^2 = \beta^2 E$ ja arvutame Euleri valemite eeskujul eksponentsiaali $e^{(C-\alpha E)t}$, vt avaldised sulgudes $\{\ldots\}$. Minnes juhtudel 1) ja 2) piirväärtustele:

$$\lim_{\beta\to 0}\cos\beta t = \lim_{\beta\to 0}\cosh\beta t = 1, \qquad \lim_{\beta\to 0}\frac{\sin\beta t}{\beta} = \lim_{\beta\to 0}\frac{\sinh\beta t}{\beta} = t,$$

tuleme juhule 3).

Eksponentsiaalile $e^{\alpha Et}$ ehk $e^{\alpha t}E$ vastab *homoteetiate rühm*; juhul $\alpha > 0$ vektorvälja trajektoorid eemalduvad kiirtena 0-punktist (tasand paisub) ja juhul $\alpha < 0$ lähenevad 0-punktile (tasand tõmbub kokku):

$$X = \partial_U(\alpha U), \qquad U' = \alpha U, \qquad U_t = e^{\alpha t}U.$$

Fookused, sadulad ja sõlmed homoteetiate mõjul moonduvad.

Euleri valemid kuuluvad juhtude 1) ja 2) alla, kui homoteetiad puuduvad ($\alpha = 0$):

1)* $C = I \;\Rightarrow\; \det I = 1$, $\operatorname{tr} I = 0$, $\Delta = -1$, $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$,

$$e^{It} = E\cos t + I\sin t,$$

2)* $C = J \;\Rightarrow\; \det J = -1$, $\operatorname{tr} J = 0$, $\Delta = 1$, $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$,

$$e^{Jt} = E\cosh t + J\sinh t.$$

Singulaarsused. Lineaarsel vektorväljal on 0-punktis *iseärasus* ehk *singulaarsus*[5]:

1a) ($\alpha > 0$, $\Delta < 0$) $\Rightarrow$ *ebastabiilne fookus*: elliptiline pööre paisuval tasandil, spiraalsed trajektoorid eemalduvad 0-punktist.

1b) ($\alpha < 0$, $\Delta < 0$) $\Rightarrow$ *stabiilne fookus*: elliptiline pööre kahaneval tasandil, spiraalsed trajektoorid lähenevad 0-punktile.

2a) ($\alpha > 0$, $\Delta > 0$) $\Rightarrow$ *ebastabiilne sõlm*: hüperboolne pööre paisuval tasandil, trajektoorid eemalduvad 0-punktist, asümptoodid ei kooldu.

2b) ($\alpha < 0$, $\Delta > 0$) $\Rightarrow$ *stabiilne sõlm*: hüperboolne pööre kahaneval tasandil, trajektoorid lähenevad 0-punktile, asümptoodid ei kooldu.

3a) ($\alpha > 0$, $\Delta = 0$) $\Rightarrow$ *ebastabiilne paraboolne sõlm*: rööplüke paisuval tasandil, trajektoorid eemalduvad 0-punktist, ei kooldu lükkesuunaline sirge.

3b) ($\alpha < 0$, $\Delta = 0$) $\Rightarrow$ *stabiilne paraboolne sõlm*: rööplüke kahaneval tasandil, trajektoorid lähenevad 0-punktile, ei kooldu lükkesuunaline sirge.

Suurus β määrab voo kiiruse ja fookuste puhul ka pöörlemise suuna.

Kompleksarvu tõlgendus üldjuhul:

$z = \alpha + \beta i$, $Z = \alpha E + \beta I$, $\operatorname{tr} Z = 2\alpha$, $\det Z = \alpha^2 + \beta^2$,

$$\Delta = -\beta^2, \ \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$$
$$e^{Zt} = e^{\alpha t}\Big(E\cos\beta t + I\sin\beta t\Big).$$

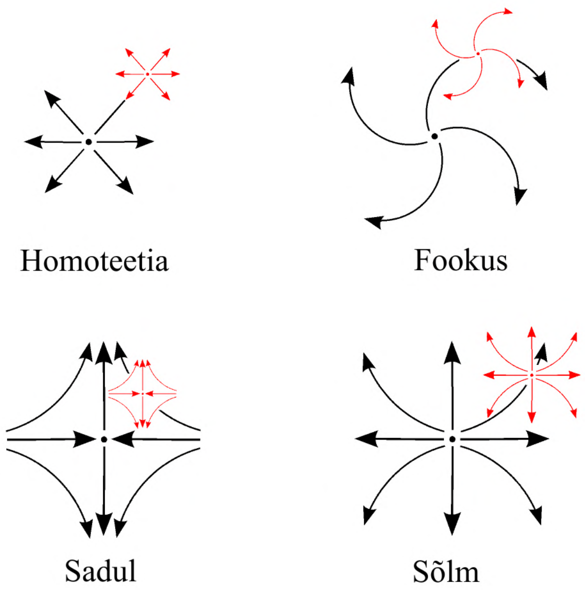
Kompleksarvule z vastab ebastabiilne või stabiilne fookus, st pöörete rühm paisuval või kahaneval tasandil. Kaaskompleksarvule $\bar{z}$ vastavad samad pöörded, kuid vastassuunalised.

4. Lineariseerimine

Lineaarsel vektorväljal on üks tähtis ja eriskummaline omapära. Kui kõneleme paisuvast/kahanevast tasandist, siis see paisumine/kahanemine ei toimu vaid 0-punkti suhtes, samamoodi tasand paisub/kahaneb ükskõik millise teise punkti suhtes. Veelgi enam, kui vaatleja liigub lineaarse vektorvälja trajektooril ja jälgib teiste punktide liikumist igaühte oma trajektooril, siis tema liikuvas teljestikus ta näeb samasugust voogu ja samasugust singulaarsust (fookust, sadulat, sõlme), mida me näeme 0-punkti ümbruses.

---

[5]Allpool joonisel 1 on näidatud neli voogu: homoteetia, fookus, sadul ja sõlm. Iga voog kordub liikuvas teljestikus.



Joonis 1. Globaalne ja lokaalne.

Sellist olukorda tasub analüüsida. Vektorvälja X voos a_t toimub nii funktsiooni f kui ka vektorvälja Y ja 1-vormi Φ teisendus ning me saame kõnelda nende *Lie tuletistest*[6] vektorvälja X suhtes:

$$f' \doteq Xf, \qquad Y' \doteq \mathcal{L}_X Y = XY - YX, \qquad \Phi' \doteq \mathcal{L}_X \Phi.$$

Arvutame esiteks Lie tuletise Y'. Rakendame Leibnizi valemit puhtformaalselt “korrutisele” Yf. Kuna f on siin suvaline funktsioon, saame $Y' = [XY]$:

$$(Yf)' = Y'f + Yf', \; Y'f = XYf - YXf, \; Y' = XY - YX \doteq [XY].$$

Lie tuletise Φ' leidmiseks rakendame Leibnizi valemit “korrutisele” $\Phi(Y)$:

$$\big(\Phi(Y)\big)' = \Phi'(Y) + \Phi(Y'), \qquad \Phi'(Y) = \big(\Phi(Y)\big)' - \Phi(Y').$$

[6]Lie arvutuse alused on põhjalikult esitatud kirjanduses, vt näiteks [2], [3].

Juhul, kui 1-vorm Φ on funktsiooni f diferentsiaal, siis, kuna kehtivad võrdused $\Phi = df$, $df(Y) = Yf$, $df(Y') = Y'f$, annab viimane valem järelduseks

$$(df)'(Y) = XYf - XYf + YXf = df'(Y),$$

kus Y on suvaline vektorväli. Jätame ära Y ning saame reegli:

funktsiooni f tuletise diferentsiaal on diferentsiaali df tuletis,

$$\boxed{d(f') = (df)', \; d(Xf) = \mathcal{L}_X(df).} \tag{5}$$

Reegel annab tähtsa implikatsiooni – *lineaarne voog koordinaatides U kordub täpselt liikuva teljestiku koordinaatides dU*:

$$\boxed{U' = CU \Rightarrow U_t = e^{Ct}U} \Rightarrow \boxed{(dU)' = CdU \Rightarrow (dU)_t = e^{Ct}dU}.$$

Sellega on põhjendatud lineaarse vektorvälja ja selle voo globaalne-lokaalne omapära.

Naturaalne baas $(R, \Theta) = (\partial_U, dU)$ teiseneb lineaarses voos vastavalt *derivatsioonivalemitele*:

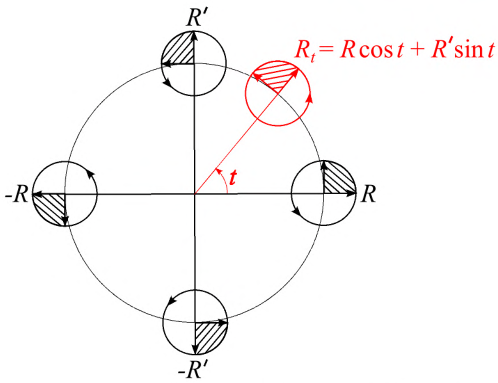
$$\begin{cases} R' = -RC \\ \Theta' = C\Theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} R_t = Re^{-Ct} \\ \Theta_t = e^{Ct}\Theta\,. \end{cases}$$

Reeperi ja koreeperi duaalsus $\Theta(R) = E$ säilub[7].

Juhul $C = -I$ ilmutab end jälle Euleri valem $e^{It} = E\cos t + I\sin t$, baas (R, Θ) pöörleb positiivses suunas (vastu kellaosutit):

$$\begin{cases} R'' + R = 0 \\ \Theta'' + \Theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_t = R\cos t + R'\sin t \\ \Theta_t = \Theta\cos t + \Theta'\sin t. \end{cases}$$

[7]Kuna teisendusel a_t kontravariantsed suurused, nagu vektorväljad, liiguvad ühes suunas ja kovariantsed suurused, nagu 1-vormid, teises suunas, siis baasi (R, Θ) puhul, et duaalsus säiluks, on reeperile R vaja rakendada teisendust a_t ja koreeperile Θ pöördteisendust a_{-t}, või vastupidi.



Joonis 2. Euleri pöörded.

Joonisel 2 on näidatud pöörded tasandil. Reeper R pöörab end samamoodi, nagu voog ümber 0-punkti[8]. Sellise pöörlemise tekitab maatriks I ning ka imaginaarühik i selle laiemas tõlgenduses. Täpsemalt, maatriks I tekitab eksponentsiaali e^{It} ja see omakorda tekitab pöörete rühma tasandil.

Märkus. Müstilisel kombel on kolm suurust e, π ja i koos ühes valemis $e^{\pi i} = -1$, vt Euleri valem juhul, kui $t = \pi$. Joonisel 2 see valem demüstifitseerub: $R_\pi = -R$, reeper teeb pöörde $180°$.

5. Mittelineaarne vektorväli

Kui vektorväli X on *mittelineaarne*, siis süsteemist (4) järeldub ka lineaarne süsteem, kuid diferentsiaalide jaoks:

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}.$$

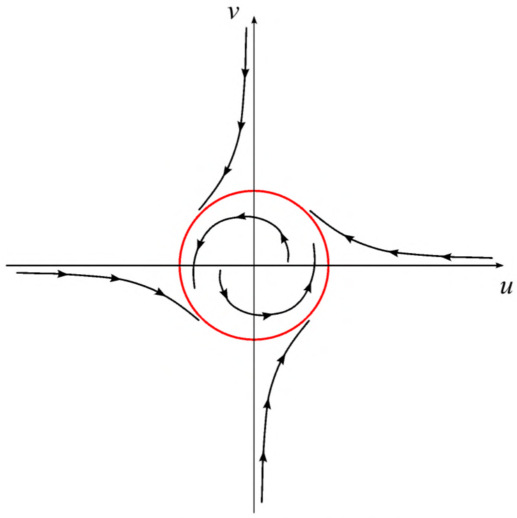
Komponentide x ja y osatuletised on siin Jacobi maatriksi elementideks. Fikseeritud punktis Jacobi maatriks fikseerub, see on

[8]Nagu eespool öeldud: lineaarne voog muutkonnal kordub muutkonna puutujaruumis.

konstantne ning puutajaruumis (koordinaatides dU) tekitab lineaarse voo. Ilmselt, lineaarne voog iseloomustab globaalset voogu vaid antud punkti ümbruses. Teisisõnu, *globaalne mittelineaarsus lokaalselt lineariseerub.*

Mõistagi, lokaalne ettekujutus globaalsest voost muutub punktist punktisse. Küll aga globaalse lineaarse voo puhul selle lokaalne esitus ei erine globaalsest ja minnes ühest punktist teise selle muutust ei toimu[9].

Näide. Olgu uv-tasandil antud mittelineaarne vektorväli X.



Joonis 3. Mittelineaarsus.

Süsteem (4) määrab voo a_t. Seda voogu iseloomustavad lokaalselt Jacobi maatriks C, selle jälg, determinant ja diskriminant Δ:

[9]Sageli väidetakse, et kuna meie ε-ümbruses toimub paisumine, siis ka universum paisub. Tegelikult lokaalne pilt pole adekvaatne globaalselt toimuvaga.

$$\begin{cases} u' = u - v - u(u^2+v^2) \\ u' = u + v - v(u^2+v^2), \end{cases} \quad C = \begin{bmatrix} 1-3u^2-v^2 & -1-2uv \\ 1-2uv & 1-u^2-3v^2 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{tr} C = 2(1-2u^2-2v^2),$$
$$\det C = 3(u^2+v^2)^2 - 4(u^2+v^2) + 2 > 0,$$
$$\Delta = (u^2+v^2)^2 - 1.$$

Kohe näeme, et vektorvälja X vektori pikkuse ruut (komponentide ruutude summa) on $(u^2+v^2)^5$, mis tähendab, et 0-punktist eemaldudes liikumise kiirus trajektooridel kasvab ja 0-punktile lähenedes kiirus aeglustub.

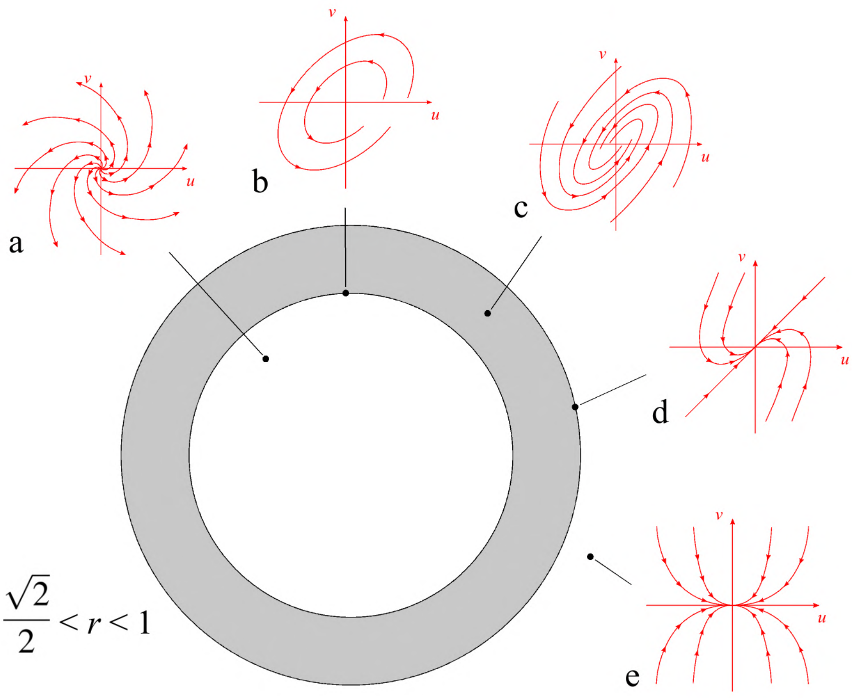
Joonisel 3 on näidatud faasiportree ja selle *atraktor* – ringjoon $r = 1$, millele lähenevad seest- ja väljaspoolt vektorvälja trajektoorid.

Joonisel 4 allpool näeme kaht kontsentrilist ringjoont $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ja $r = 1$ moodustamas rõngast. Väiksemat ringjoont $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ läbides muudab märki jälg $\operatorname{tr} C$, läbides suuremat ringjoont $r = 1$ muudab märki diskriminant Δ. Kui liikuda rõnga seest rõngast välja, siis kahel ringjoonel toimivad *bifurkatsioonid*. Vahelduvad *režiimid*: rõngale minnes ebastabiilne fookus muutub stabiilseks (paisumine kahanemiseks) ning rõngalt väljudes elliptiline voog teiseneb hüperboolseks (fookusest saab sõlm). Muuseas, üleminekud on vaid hetkelised ja toimivad sujuvalt, nii, nagu näiteks tavaline funktsioon muudab tuletise märki ekstreemumpunkte läbides.

Olukord on vast lihtsam polaarkoordinaatides (r, φ):

$$\begin{cases} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = r(1-r^2) \\ \varphi' = 1, \end{cases}$$

$$\operatorname{tr} C = 2(1-2r^2), \quad \det C = 3r^4 - 4r^2 + 2, \quad \Delta = r^4 - 1,$$
$$X = r(1-r^2)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$



Joonis 4. Bifurkatsioonid ja režiimid.

Teeme veel ülevaate, kuidas režiimid vahelduvad:

a) rõnga sees: $r < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\Delta < 0$, $\operatorname{tr} C > 0$ – ebastabiilne fookus,

b) rõnga sisepiiril: $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\Delta < 0$, $\operatorname{tr} C = 0$ – fookus (elliptiline pööre),

c) rõnga peal: $\frac{\sqrt{2}}{2} < r < 1$, $\Delta < 0$, $\operatorname{tr} C < 0$ – stabiilne fookus,

d) rõnga välispiiril: $r = 1$, $\Delta = 0$, $\operatorname{tr} C < 0$ – stabiilne paraboolne sõlm,

e) rõngast väljas: $r > 1$, $\Delta > 0$, $\operatorname{tr} C < 0$ – stabiilne sõlm.

Lõpetuseks üks huvitav arutluskäik. Eeldame, et universum on mittelineaarne, nagu näidatud joonisel 3. Võttes arvesse kõik galaktikad ja kõikvõimalikud struktuurid, mis meid ümbritsevad, oleme ikkagi oma väikeses ε-ümbruses, kus valitseb lineaarsus. Meie maailm nagu paisub ja me arvame, et kogu universumis toimib homoteetia, nagu kujutatud joonisel 1. Võib pidada võimalikuks, et meie oma ε-ümbrusega liigume mingis hajuvas voos, näiteks, mittestabiilses sõlmes; sel juhul oleks põhjendatud ka nn esmapaugu teooria. On ka teisi võimalusi – me tajume oma maailma, näiteks sellisena, nagu näeme ühel juhtudest a, b, c, d, e joonisel 4. Võib arvata, et kõik need lineaarsed maailmad eksisteerivad, kuid universumi erinevates paikades. Kas on meil sel juhul võimalik minna ühest lokaalsest maailmast teise? Mõistagi, see oleks võimalik, kui meie oma ε-ümbrusega liiguksime, nagu ülalpool näidatud, asendist a asendisse b, sealt asendisse c jne, elades üle vast mingil ajal ja mingis kohas ruumi ümberkorraldusi, st bifurkatsioone. Põhiliseks meie arutlustes jääb igal juhul kindlalt see, et lähtudes lokaalsest maailmast ei saa teha järeldusi universumi kohta globaalselt. Sest valdavad struktuurid universumis on ilmselt mittelineaarsed.

Autor avaldab tänu Reimo Palmile abi eest artikli vormistamisel.

Olgu mainitud Eesti Haridus- ja Teadusministeeriumi institutsionaalne uurimistoetus IUT20-57.

Kirjandus

[1] M. Rahula. *Sissejuhatus diferentsiaalgeomeetriasse.* Tartu Ülikool, Tartu, 1991, 136 lk.

[2] M. Rahula. *New Problems in Differential Geometry.* World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993, 172 pp.

[3] G. Atanasiu, V. Balan, N. Brînzei, M. Rahula. *Differential-Geometric Structures: Tangent Bundles, Connections in Fiber Bundles, Exponential Law and Jet Spaces* (in Russian). Librokom, Moskva, 2009, 320 pp.

Operaatorideaalid ja tensorkorrutised Banachi ruumide struktuuri-uuringutes

EVE OJA[1]
Tartu Ülikool

1. Eesti Vabariigi teaduspreemia 2014 täppisteaduste alal

Meie matemaatikuteperet rõõmustas 2014. aasta Riigi teaduspreemiate juures eriti see, et laureaatide seas oli koguni kolm matemaatikut – kolm Tartu Ülikooli Matemaatikateaduskonna vilistlast. KRISTA LÕHMUS (minu kursusekaaslane) pälvis teaduspreemia põllumajandusteaduste alal, ELLU SAAR sotsiaalteaduste alal ning täppisteaduste preemia tuli matemaatikasse. Selle sain ma uurimuste tsükli "Operaatorideaalid ja tensorkorrutised Banachi ruumide struktuuri-uuringutes" eest.

Auhinnatud töödetsükkel koosneb aastatel 2010–2013 ilmunud artiklitest [1]–[6], [8], [14]–[20]. Artiklid [14] ja [15] on ülevaateartiklid, mis telliti vastavalt plenaarettekannete põhjal esinduslikul rahvusvahelisel konverentsil "Banachi algebrad 2009" Poolas ja "Rahvusvahelisel matemaatilise analüüsi kongressil 2009" Hispaanias.

Uurimuste tsükkel "Operaatorideaalid ja tensorkorrutised Banachi ruumide struktuuri-uuringutes" tegeleb matemaatika alusuuringutega: luuakse funktsionaalanalüüsi ja operaatorite teooria piirimail asuvaid uusi meetodeid ning rakendatakse neid Banachi ruumide struktuuri uurimisel.

[1]Eve Oja sai 2014. a. Eesti Vabariigi teaduspreemia täppisteaduste alal.

2. Banachi ruumid

Banachi ruumide teooria, aga ka kaasaegse funktsionaalanalüüsi sünniaastaks peetakse aastat 1932, mil ilmus STEFAN BANACHI monograafia *Théorie des opérations linéaires* (*Lineaarsete operatsioonide teooria*).

Banachi ruumi mõistet on lihtne tajuda. Meil kõigil on olemas intuitiivne ettekujutus *hulgast* kui mingist objektide ehk elementide kogumist (näiteks: kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$, kõigi punktide hulk tasandil). *Banachi ruumiks* nimetatakse niisugust hulka, mille elemente saab liita ja arvudega korrutada (s.t. tegemist on *vektorruumiga*). Veel peab iga elemendi x jaoks olema defineeritud *norm* $\|x\|$ – elemendi x "pikkus" (norm ongi oma olemuselt arvu absoluutväärtuse ja ka vektori pikkuse üldistus). Lisaks kehtib nn. *täielikkuse* aksioom, mis kirjeldab selles ruumis koonduvaid jadasid (jada (x_n) koondub, kui $\lim \|x_n - x_m\| = 0$).

Näide 1. Arvsirge $\mathbb{R}$ on Banachi ruum, kus arvu x norm defineeritakse tema absoluutväärtusena: $\|x\| = |x|$.

Näide 2. Eukleidiline tasand $\mathbb{R}^2$ on Banachi ruum, kus vektori $x = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ norm defineeritakse tema pikkusena:

$$\|x\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,.$$

Näide 3. Lõigus $[a, b]$ pidevad funktsioonid moodustavad Banachi ruumi $C[a, b]$, kus funktsiooni $x = x(t)$ norm defineeritakse maksimumi abil:

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|\,.$$

Ruum $C[a, b]$ on Banachi ruumide teooria rakendustes üks sagedamini kasutatavaid ruume. Aga ei $C[a, b]$, rääkimata tasandist $\mathbb{R}^2$ või arvsirgest $\mathbb{R}$, peegelda vähemalgi määral seda teoreetilist ja rakenduslikku rikkust, mida pakuvad Banachi ruumid oma üldisuses ja abstraktsuses.

3. Kired baasiprobleemi ümber

Banachi ruumide teooria ja selle arvukate rakenduste jaoks (arvutusmatemaatikas, harmoonilises analüüsis, osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teoorias, tõenäosusteoorias jm.) on kasulikud eelkõige niisugused ruumid, millel on teatav "rikas" struktuur, mis võimaldab Banachi ruumi üldiste elementide lähendamist lõplikumõõtmeliste, kompaktsete või muude "lihtsamate" objektide kaudu. Eriti hea on, kui ruumis on olemas baas.

Öeldakse, et Banachi ruumis X on olemas *baas*, kui selles ruumis leiduvad niisugused elemendid $e_1, e_2, \ldots$ (baasielemendid), et ruumi X iga element x esitub üheselt lõpmatu summana

$$x = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n + \ldots,$$

kus $a_1, a_2, \ldots$ on arvud. Baasiga Banachi ruumi igat elementi x saab seega lähendada "lihtsa" lõpliku summaga $a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$, kus on "mängus" ainult (arvudega korrutatud) baasielemendid.

Baasiga Banachi ruumile on lähedane *separaabli* ruumi mõiste. Seal saab elemente lähendada elementidega mingist loenduvast hulgast. Baasiga Banachi ruumid on separaablid. Kas aga igas separaablis Banachi ruumis on olemas baas? See nn. *baasiprobleem* oli sõnastatud juba Banachi monograafias 1932. aastal ning baasiprobleemi on peetud üheks kõige olulisemaks ja haaravamaks probleemiks Banachi ruumide teoorias. Baasiprobleem on tihedalt seotud aproksimatsiooniprobleemiga (vt. osa "Aproksimatsiooniprobleem ja valge hani" artiklist [10] või [11]). Tuhanded matemaatikud tegelesid baasi otsimisega separaablis Banachi ruumis, sest valdavalt usuti baasiprobleemi positiivsesse lahendusse.

Pisut sain minagi näha baasiprobleemi ümber möllavat kirge matemaatikute kogukonnas. Nimelt oli mul tudengina see õnn, et Gennadi Vainikko võttis ka mind (kuigi minu juhendaja oli Gunnar Kangro) kaasa Voroneži talvekooli, kuhu kogunesid matemaatikaprominendid kogu N. Liidust. Kõige elavamat vastukaja tekitas seal üks baasiprobleemile võimalikku positiivset lahendust ennustav ettekanne (F. Vaher). Pärast seda algas kirglik, pikk ja üsna tavatu arutelu. Auväärsed hallipäised akadeemikud ja professorid muutusid justkui poisikesteks, kes üksteist katkestades vaidlesid, et kas võib olla baasi või mitte. Nii et asi läks peaaegu hääletamiseks. Tudengile pakkus see igatahes üpris naljakat vaatepilti. See oli jaanuaris 1972.

Seda dramaatilisem oli *negatiivne* lahendus, mis saabuski juba 1972. aastal: noor rootsi matemaatik PER ENFLO konstrueeris separaabli Banachi ruumi (pealegi veel nii hea omadusega nagu refleksiivsus), milles ei olnud baasi (sel ruumil polnud isegi mitte aproksimatsiooniomadust). Äsja 28-aastaseks saanud Enflo kandis oma konstruktsiooni ette esinduslikul konverentsil Jeruusalemmas 1972. aasta juunis. Kuulus rumeenia matemaatik IVAN SINGER kirjeldas seda mulle (9 aastat hiljem) järgmiselt. Auditoorium oli alguses rõõmsalt-skeptiliselt meelestatud: loodeti, et Enflo tõestuses on ehk lünk sees. Aga tõestuskäigu arenedes muutus saal järjest tõsisemaks ning ettekande lõppedes valitses pikka aega sünge hauavaikus: liigagi paljud auditooriumi hulgast olid ju aastakümnete jooksul andnud kogu oma energia püüdmaks baasiprobleemi *positiivselt* lahendada.

4. Aproksimatsiooniomadus

Niisiis, baasi ei tarvitse olla isegi separaablites refleksiivsetes Banachi ruumides ning baasi pole ammugi olemas mitteseparaablites ruumides. Nendel ruumidel võib aga olla mingit sorti *aproksimatsiooniomadus*. See on teooria ja rakenduste jaoks kasulik Banachi ruumide struktuuriomadus, mis võimaldab ruumi üldiseid elemente lähendada elementidega teatud lõplikumõõtmelistest alamruumidest. Aproksimatsiooniomadustega ruumide kirjeldamine on olnud üheks kõige populaarsemaks klassikaliseks probleemiks funktsionaalanalüüsis, huvitõusudega 1970ndatel ja 1990ndatel aastatel (vt. osa "Aproksimatsiooniomaduse olemus" artiklist [10] või [11]). Märgatav huvitõus on täheldatav alates aastast 2005, mil ajakirjas *Mathematische Annalen* ilmus artikkel [7], kus evitasime *nõrga tõkestatud aproksimatsiooniomaduse* ning analüüsisime klassikalise aproksimatsiooniomadusega seotud probleeme täiesti uute vaatenurkade alt. Uuringutesse on olnud haaratud matemaatikud rohkem kui tosinast riigist üle maailma, nende seas näiteks niisugused tippmatemaatikud nagu Aron, Botelho, Figiel, Godefroy, Johnson, Å. Lima, Maestre, Pełczyński, Piñeiro, Plichko, Reinov, Yost jt. Auhinnatud töödetsükkel kuulub samasse "lainesse": Banachi ruumide struktuuri iseloomustatakse uute, viimasel kümnel aastal ilmunud aproksimatsiooniomaduste terminites. Töödetsüklis on selleks loodud uued tõestusmeetodid, mis paiknevad funktsionaalanalüüsi ja operaatorite teooria interaktsioonialal. Olulisemateks võtmesõnadeks on seejuures *tensorkorrutised* ja *operaatorideaalid*.

5. Tensorkorrutised ja operaatorideaalid

Käesoleva ridade autor sukeldus Banachi ruumide teooriasse 1980. aasta sügistalvel. Eelnevalt olin tegelenud summeeruvusteooriaga ning lokaalselt kumerate ruumidega (need on Banachi ruumidest tunduvalt üldisemad objektid, mistõttu nende struktuur pole nii rikkalik kui Banachi ruumidel), õppinud Leningradi Riiklikus Ülikoolis prantsuse keelt, õpetanud selles keeles tulevasi insenere Mali Vabariigi pealinnas Bamakos (vt. [9]) ning teinud paljut muudki. Nii et vahele oli jäänud tervelt viis aastat, mil ma üleüldse matemaatilist uurimistööd ei teinud.

1980–81 õppeaasta oli mul õnn veeta N. Liidu stažöörina ja ühtlasi Prantsuse Vabariigi stipendiaadina Marseille's. Marseille'sse sattusin ma seoses N. Liidu poolt vallapäästetud Afganistani sõjaga. Ise soovisin küll Pariisi ning N. Liidu poolne taotlus oligi Pariisi jaoks, kuid maailmakuulus matemaatik Laurent Schwartz (Fieldsi preemia 1950), kes Afganistani sõja asjus aktiivselt N. Liidu vastu välja astus, olevat soovinud vaenuliku N. Liidu esindajat iseendast ja seega ka Pariisist võimalikult kaugele saata. Sellest Marseille'sse pagendamise loost rääkis mulle professor Billard, kelle juurde Marseille'sse Schwartz mind suunaski.

Professor Billard'i seminaris uuriti parajasti RETHERFORDI ja STEGALLI fundamentaalset tööd (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972), mis tugines Banachi ruumide tensorkorrutiste teooriale. Niisiis pidin ma iseseisvalt ja kiiresti endale selle teooria selgeks tegema. Tensorkorrutiste teooria oli loonud ALEXANDER GROTHENDIECK (Fieldsi preemia 1966) 1950ndatel aastatel ja seda peetakse väga keeruliseks teooriaks. Õppisin põhiliselt Grothendiecki 1955. aastal ilmunud põhjapaneva, aga lakoonilises stiilis monograafia *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, nn. *Grothendiecki memuaari*, järgi. Juhtus nii, et mõtlesin enda tarbeks välja lihtsama alternatiivse käsitluse, mis võimaldas mul juba paari kuu pärast kirjutada oma esimene teadusartikkel tensorkorrutiste kohta. Igatahes peeti mind mõne aasta pärast tensorkorrutiste spetsialistiks ning kutsuti 1989. aastal sellekohast loengukursust lugema Pariisi VI ja VII Ülikooli doktorantidele, teaduritele ja õppejõududele.

Kui kahe Banachi ruumi *tensorkorrutis* on üks uus (rikkalike omadustega) Banachi ruum, mis nende kahe põhjal moodustatakse, siis operaatorideaali jaoks peaks kõigepealt rääkima operaatorist. Operaator on koolimatemaatikast tuntud funktsiooni üldistus: *operaator* on niisugune funktsioon, mille määramispiirkonnaks on mingi Banachi ruum ja ka muutumispiirkonnaks on mingi Banachi ruum. Lisaks eeldatakse operaatorilt lineaarsust ja pidevust. Kui operaatori väärtuste hulk on lõplikumõõtmeline vektorruum, siis räägitakse *lõplikumõõtmelisest operaatorist*.

Operaatorideaal on mugav abstraktsioon, mis võimaldab käsitleda teatud liiki operaatoreid kui ühte tervikut, täpsustamata seejuures operaatorite määramis- või muutumispiirkonnaks olevaid Banachi ruume. Näiteks kõigi operaatorite ideaal on kõige suurem operaatorideaal. Lõplikumõõtmeliste operaatorite ideaal on aga kõige väiksem: ta sisaldub igas operaatorideaalis. Operaatorideaalide teooria lõi saksa matemaatik ALBRECHT PIETSCH 1970ndatel aastatel. Praegu on Pietsch 82-aastane klassik. Kui matemaatikategemist kiputakse pidama noorte pärusmaaks (Fieldsi preemiat antaksegi ainult noortele matemaatikutele), siis Pietsch on küpse matemaatikuna jäänud samas "nooreks matemaatikuks", demonstreerides aina uusi nutikaid ideesid ja tõestades tugevaid teoreeme.

Operaatorideaalide teooria ja tensorkorrutiste teooria "kohtuvad" lõplikumõõtmelistel operaatoritel. See on üldteada lihtne fakt, millele siiamaani pole erilist tähelepanu pööratud. Auhinnatud töödetsükli artiklis [16] pannakse tähele, et ülalmainitud "kohtumispaigas" tekivad teatud võrratused, mille abil saab väljendada Banachi ruumi omadusi nii ruumi enese terminites (*sisevõrratused*) kui ka sellest ruumist erinevate ruumide klasside kaudu (*välisvõrratused*). Matemaatikas on aga üheks laialt levinud *üldiseks probleemiks* küsimus, kuidas ruumi "välisterminites" kirjeldatud omadusi mõista ruumi enese terminites? Ning, vastupidi, kuidas ruumi sisestruktuur mõjutab "koostegevust" teiste ruumidega?

Sedasorti üldist huvi pakkuvate küsimuste lahendamiseks sobib hästi artiklis [16] loodud tensorkorrutisi ja operaatorideaale siduv sise- ja välisvõrratuste teooria. Teooria rakendusena on näiteks antud uus lihtne tõestus Grothendiecki teoreemile projektiivse ja injektiivse tensorkorrutise kokkulangemise kohta ning on välja töötatud ühtne meetod Grothendiecki klassikaliste, Lima–Oja nõrga tõkestatud ja Saphari p-aproksimatsiooniomaduste (kus $p \geqslant 1$ on arvuline parameeter) uurimiseks. Muuhulgas on tuletatud nõrga tõkestatud aproksimatsiooniomaduse olemuslik kriteerium ruumi enese terminites (varasemates töödes olid alati "appi võetud" ka teised, "välised" Banachi ruumid) ning tõestatud Bourgaini (Fieldsi preemia 1994) ja Reinovi tulemuse parendus Saphari p-aproksimatsiooniomaduste separaabli ja refleksiivse määratuse kohta. Töö [16] ilmus ülimalt selektiivses ajakirjas *Trans. Amer. Math. Soc.*, mis on matemaatikute kogukonnas sama prestiižne nagu *Nature* loodusteadlastel.

6. Kompaktsuse vormid ja nendega seotud operaatorideaalid

Banachi ruumide teoorias ning rakendustes mängib tähtsat rolli hulkade kompaktsus. Põhjus on selles, et kompaktsed hulgad on küllastunud koonduvate jadadega: iga jada sisaldab endas koonduva osajada. Koonduvate jadade abil saab aga lähendada ruumi üldiseid elemente, mis omakorda – tänu rakendusmatemaatika vahendusele – avab tee arvutite kasutamisele. Kompaktsuse tugevam vorm on p-kompaktsus (kus $p \geqslant 1$ on arvuline parameeter). Sedasorti tugevat kompaktsust ja vastavate p-kompaktsete operaatorite poolt moodustuvaid operaatorideaale on viimasel kaheksal aastal aktiivselt uurinud paljud matemaatikud üle ilma. Mitmed taoliste operaatorideaalide kohta püstitatud struktuuriprobleemid leiavad lahenduse töödetsükli artiklites [1], [2], [17], [18].

Näiteks oli artikli [18] ajendiks hispaania matemaatikute DELGADO ja Piñeiro (*Proc. Amer. Math. Soc.*, 2011) poolt püstitatud väljakutsuvalt elementaarse sõnastusega probleem: kas Banachi ruumis nulliks koonduv p-kompaktne jada on alati p-null jada? Matemaatika ajalugu on korduvalt näidanud, et lihtsalt sõnastatavad probleemid võivad olla raskesti lahendatavad. Lahendamisel tekivad aga reeglina uued meetodid, mis võivad kasutada üsnagi keerulist matemaatilist aparatuuri. Nii juhtus ka Delgado–Piñeiro probleemiga: probleemi lahendusvõti oli peidus operaatorideaalide ja tensorkorrutiste teooriate piirimail [18]. Artikli [18] üheks põhitulemuseks on Grothendiecki kuulsa tuumaoperaatorite teoreemi parendusüldistus, mis annab kvalitatiivse panuse isegi tuumaoperaatorite teooria klassikasse. Selle rakendusena arendatud teooria sisaldab uusi tulemusi mitmesuguste operaatorideaalide vallas (p-tuumaoperaatorid, (r, p, q)-tuumaoperaatorid, p-kompaktsed operaatorid) ning võimaldas pärast p-null jadade kirjeldamist Chevet–Saphari tensorkorrutiste kaudu (veel üks oluline tulemus) lahendada positiivselt Delgado–Piñeiro probleem. Töö [18] ilmus ajakirjas *J. Funct. Anal.*, mis on funktsionaalanalüüsi valdkonna absoluutne tippajakiri.

Artiklis [17] on tõestatud, et india matemaatikute SINHA ja KARNI (*Studia Math.*, 2002) poolt sisse toodud (p, p)-aproksimatsiooniomadus ühtib alati klassikalise aproksimatsiooniomadusega, ning ta ei ole mitte viimase üldistus nagu siiamaani arvati. Rakendusena on iseloomustatud Lebesgue'i ruumide kinniste alamruumide ja faktorruumide aproksimatsiooniomadust p-kompaktsete operaatorite ideaali kaudu. Samuti on lahendatud üks Delgado, Piñeiro ja SERRANO (*J. Math. Anal. Appl.*, 2010) püstitatud probleem ning näidatud, et p-kompaktsete ja klassikaliste Pietsch–Fourie–Swarti p-kompaktsete operaatorite ideaalid on omavahel täiesti erinevad operaatorite klassid.

Artiklis [1] on evitatud (p, r)-kompaktse operaatori mõiste, mis erijuhtudena haarab endasse nii Bourgain–Reinovi kui ka Sinha–Karni p-kompaktsete operaatorite versioonid. On tõestatud, et (p, r)-kompaktsed operaatorid moodustavad teatavate tuumaoperaatorite ideaali sürjektiivse katte. Sellest tulemusest lähtudes arendatakse (p, r)-kompaktsete operaatorite ideaali kui teatava kvaasi-Banachi operaatorideaali süstemaatilist teooriat. Selle uue teooria erijuhuna tekib alternatiivne tunduvalt lihtsam teooria ka p-kompaktsete operaatorite käsitlemiseks. Artikkel [2] on ulatuslik süstemaatiline uurimus kompaktsete operaatorite ideaalistruktuuri kohta, mille põhitulemusena on olemuslikult avatud $M(r, s)$-ideaalistruktuuri tekkemehhanism.

7. Meetrilise aproksimatsiooni probleem ikka veel lahtine

Klassikaline *aproksimatsiooniomadus* tähendab seda, et Banachi ruumi elemente saab lähendada, kasutades lõplikumõõtmelisi operaatoreid. Kui neid lõplikumõõtmelisi operaatoreid on võimalik valida nii, et operaatorite normid on väiksemad mingist kindlast arvust, näiteks väiksemad kui 1 000 000, siis öeldakse, et ruumil on *tõkestatud aproksimatsiooniomadus*. Väikseim selline tõke saab olla arv 1. Sel juhul öeldakse, et ruumil on *meetriline aproksimatsiooniomadus*. See oleks siis kõige parem aproksimatsiooniomadus!

Grothendiecki memuaari nähtamatuks telgjooneks, millest kord kaugenetakse ja millele kord lähenetakse, tundub olevat küsimus, millises olukorras aproksimatsiooniomadus saab olla meetriline? Sealt pärineb ka *meetrilise aproksimatsiooni probleem*: kas Banachi ruumi kaasruumi aproksimatsiooniomadus on alati meetriline?

(Märgime, et Banachi ruumi X *kaasruum* on ruumist X lähtuvate kõigi arvuliste väärtustega operaatorite ruum; kaasruum on ka ise Banachi ruum.)

Meetrilise aproksimatsiooni probleem on Banachi ruumide teooria klassikaline probleem, mida 60 aasta jooksul on "rünnanud" paljud silmapaistvad matemaatikud (õigem oleks vast öelda, et seda probleemi on (mõnevõrra) uurinud enamus Banachi ruumide huvilisi). Hoolimata kõigist jõupingutustest, on probleem ikka veel lahtine. Kõige kaugeleulatuvam lahendus positiivses suunas on: "jah", kui kaasruumil või kaasruumi kaasruumil on Radon–Nikodými omadus. Kuid seegi teoreem on vana, pärinedes 1970ndate aastate lõpust. Sedalaadi teoreemide tõestusi iseloomustab kuulus ameerika matemaatik CASAZZA kui "müstilisi": iga samm tõestuses on küll arusaadav, aga müstiliseks jääb üldpõhjus, miks need sammud kokku ikkagi tõestuse annavad!?! Selle vana teoreemi (või erijuhtude) üksteisest erinevaid tõestusi on leitud palju (autoriteks näiteks CHO, DIESTEL, Godefroy, Grothendieck, Johnson, Å. Lima, LINDENSTRAUSS, NYGAARD, Oja, Reinov, Saphar, TZAFRIRI, UHL). Kuigi on ilmunud ka asja olemust selgelt avavaid tõestusi ([7], [12], [16]), pole siin veel mitte keegi suutnud ületada 1970ndatest aastatest pärinevat Radon–Nikodými omaduse "piiri".

Meetrilise aproksimatsiooni probleemile lahendusteede otsimisel peetakse läbimurdeks artikleid [7] (kus tõestasime, et kaasruumi aproksimatsiooniomadus on alati nõrgalt(!) meetriline) ning [12] (mis näitab kätte probleemi lahendustee, kui ainult keegi oskaks sobivalt kirjeldada kompaktsete operaatorite kaasruumi!). Minu hea kolleeg Åsvald Lima (Norra) emeriteerus 62-aastasena selleks, et viimaks ometi olla vaba bürokraatlikust tegevusest ning püüda probleemi põhjalikult uurida. See oli ligi 13 aastat tagasi. Meiega on töötanud koos ka Åsvaldi poeg Vegard ning auhinnatud artiklitest neli ongi selle "sünergia" tulem.

Artiklis [3] on evitatud uudne Banachi operaatorideaalist sõltuva tõkestatud aproksimatsiooniomaduse mõiste. Originaalse tensorkorrutiste ja lõplikumõõtmeliste operaatorite faktorisatsiooni meetodiga on tõestatud, et integraalsete operaatorite ideaal määrab tõkestatud aproksimatsiooniomaduse, kuid tuumaoperaatorite ideaal määrab nõrga tõkestatud aproksimatsiooniomaduse. Rakendusena selgub, et esimesel juhul sobib testruumiks absoluutselt summeeruvate jadade ruum ℓ_1, teisel juhul aga nulljadade ruum c_0. Siit püstitub loomulik küsimus, kas testruumiks võiks sobida ka mingi üks klassikaline ruum? Artiklites [5] ja [6] ongi tõestatud, et mõlemil juhul sobivad testruumiks nii ruum $C[0,1]$ (vt. Näide 3) kui ka lõigus $[0,1]$ integreeruvate funktsioonide ruum $L_1[0,1]$, samuti suvaline Lindenstraussi ruum, mille kaasruumil puudub Radon–Nikodými omadus. Tõestusmeetod on küllaltki komplitseeritud ning kasutab artikli [16] tulemusi.

Artikli [3] edasiarendusena (tuues sisse uudse momendina lineaarsplainid) avastati artiklis [4], et Banachi ruumidel võib esineda täiesti uut tüüpi struktuur, mis meenutab kahe tüvega puud. Artiklis [4] evitataksegi kahe tüvega puu mõiste ja põhitulemusena kirjeldakse absoluutselt summeerivate operaatorite ruumi kahe tüvega puude terminites. Põhitulemusel on olulisi rakendusi isegi Banachi ruumide klassikasse: näiteks lõigus pidevate (ka vektorväärtustega) funktsioonide ruumi uued struktuuriomadused ja Radon–Nikodými omaduse uus kriteerium. Artikli [4] edasiarendusena on artiklis [6] saadud olulisi tulemusi Lindenstraussi ruumidelt lähtuvate operaatorite ruumide struktuuri kohta, kusjuures on evitatud separaabli Lindenstraussi ruumiga seotud puu mõiste.

8. Uued aproksimatsiooniomadused

Matemaatikaklassikud Figiel, Johnson ja Pełczyński (*Israel J. Math.*, 2011) tõid sisse uue olulise Banachi ruumide struktuuriomaduse – *paaride tõkestatud aproksimatsiooniomaduse*. Paari moodustavad siin Banachi ruum X ja tema alamruum Y ning tegemist on niisuguse tõkestatud aproksimatsiooniomadusega, mille puhul lähendavad lõplikumõõtmelised operaatorid peavad viima alamruumi Y elemendid tagasi ruumi Y.

Selle uue omaduse uuringutesse annavad panuse artiklid [8] ja [20]. Artiklis [20] sisaldub vähemalt kaks olulist teoreemi, sealhulgas paaride tõkestatud aproksimatsiooniomaduse duaalsusteoreem. Tõestamiseks on loodud üldine meetod, mis tugineb nii integraalsete operaatorite ideaali ärakasutamisele (teoreemide sõnastuses ei viita miski integraalsetele operaatoritele) kui ka operaatorideaalide poolt määratud tõkestatud aproksimatsiooniomaduse kriteeriumile artiklist [13]. Artiklis [8] on evitatud operaatorite kumera hulga poolt defineeritud aproksimatsiooniomaduse mõiste – *kumer aproksimatsiooniomadus* – ning loodud vastav ühtne tõestusmetoodika. See sobib näiteks Banachi võrede positiivsete aproksimatsiooniomaduste käsitlemisel asendama NIELSENI (*Israel J. Math.*, 1988) vägagi tehnilist võrespetsiifilist aparatuuri. See hõlmab aga ka Banachi ruumide paaride aproksimatsiooniomadust.

Üheks kõige vahetumaks baasi üldistuseks on *kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus*, mille korral lähendavad lõplikumõõtmelised operaatorid on omavahel paarikaupa kommuteeruvad. Seda omadust on põhjalikult uuritud üle 20 aasta. 2001. aastal ilmus Casazza, KALTONI ja WOJTASZCZYKI teoreem, millest selgus, et kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus on üsna haruldane omadus, mida pole isegi tõkestatud jadade ruumil ℓ_∞. Töös [19] on evitatud *asümptootiline kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus*, mis on laialt levinud (nt. on olemas kõigil Banachi ruumide kaasruumidel, sh. ruumil ℓ_∞). Artikkel [19] sisaldab vähemalt neli olulist teoreemi, kust selgub, et kui ruumil on asümptootiline kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus, siis see ruum on küllastunud alamruumidega, millel on "väga heal" kujul kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus; need alamruumid on lokaalselt täiendatavad ja erijuhtudel koguni täiendatavad. Tõestusmeetod on suhteliselt komplitseeritud ning kasutab mitmekesist operaatorite teooria ja funktsionaalanalüüsi aparatuuri.

Lõpetuseks soovib autor mainida Eesti Haridus- ja Teadusministeeriumi institutsionaalset uurimistoetust IUT20-57.

Kirjandus

[1] K. Ain, R. Lillemets, E. Oja. Compact operators which are defined by ℓ_p-spaces. Quaest. Math. 35 (2012), 145–159.

[2] R. Haller, M. Johanson, E. Oja. $M(r, s)$-ideals of compact operators. Czechoslovak Math. J. 62 (2012), 673–693.

[3] Å. Lima, V. Lima, E. Oja. Bounded approximation properties via integral and nuclear operators. Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 287–297.

[4] Å. Lima, V. Lima, E. Oja. Absolutely summing operators on $C[0, 1]$ as a tree space and the bounded approximation property. J. Funct. Anal. 259 (2010), 2886–2901.

[5] Å. Lima, V. Lima, E. Oja. Bounded approximation properties in terms of $C[0, 1]$. Math. Scandinavica 110 (2012), 45–58.

[6] Å. Lima, V. Lima, E. Oja. Absolutely summing operators on separable Lindenstrauss spaces as tree spaces and the bounded approximation property. Banach J. Math. Anal. 8 (2014), 190–210.

[7] Å. Lima, E. Oja. The weak metric approximation property. Math. Annalen 333 (2005), 471–484.

[8] A. Lissitsin, E. Oja. The convex approximation property of Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 379 (2011), 616–626.

[9] E. Oja. Bamako-päevade pudemeid. Noorus 11 (1979), 22–25; Noorus 12 (1979), 26–28.

[10] E. Oja. Teaduspreemia täppisteaduste alal tööde tsükli "Banachi ruumide aproksimatsiooniomadused ja kaasruumide geomeetria" eest. Eesti Vabariigi teaduspreemiad 2001. Eesti Teaduste Akadeemia, Tallinn, 2001, 22–29.

[11] E. Oja. Banachi ruumide aproksimatsiooniomadused ja kaasruumide geomeetria. Eesti Matem. Seltsi Aastaraamat 2001. Eesti Matem. Selts, Tartu, 2003, 93–103.

[12] E. Oja. The impact of the Radon-Nikodým property on the weak bounded approximation property. Rev. R. Acad. Cien. Ser. A. Mat. 100 (2006), 325–331.

[13] E. Oja. Lifting bounded approximation properties from Banach spaces to their dual spaces. J. Math. Anal. Appl. 323 (2006), 666–679.

[14] E. Oja. On bounded approximation properties of Banach spaces. Banach Algebras 2009. Banach Center Publ. Vol. 91. Banach Center, Warszawa, 2010, 219–231.

[15] E. Oja. Bounded approximation properties via Banach operator ideals. Advanced Courses of Mathematical Analysis IV - Proceedings of the Fourth International School - In Memory of Professor Antonio Aizpuru Tomas, Jerez de la Frontera, 8-12 September 2009. World Scientific, New Jersey–London–Singapore, 2011, 196–215.

[16] E. Oja. Inner and outer inequalities with applications to approximation properties. Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 5827–5846.

[17] E. Oja. A remark on the approximation of p-compact operators by finite-rank operators. J. Math. Anal. Appl. 387 (2012), 949–952.

[18] E. Oja. Grothendieck's nuclear operator theorem revisited with an application to p-null sequences. J. Funct. Anal. 263 (2012), 2876–2892.

[19] E. Oja, I. Zolk. The asymptotically commuting bounded approximation property of Banach spaces. J. Funct. Anal. 266 (2014), 1068–1087.

[20] E. Oja, S. Treialt. Some duality results on bounded approximation properties of pairs. Studia Math. 217 (2013), 79–94.

(Käesolev artikkel on Eve Oja artikli *Teaduspreemia täppisteaduste alal uurimuste tsükli "Operaatorideaalid ja tensorkorrutised Banachi ruumide struktuuri-uuringutes" eest* (Eesti Vabariigi teaduspreemiad 2014, Tallinn, 2014, 32–43) ümbertöötatud variant.)

Banachi ruumide aproksimatsiooniomadustest

INDREK ZOLK[1]
Tartu Ülikool

1. Aproksimatsiooniomadus ja Schauderi baas

Teatavasti saab matemaatika hästi hakkama lineaarsete objektidega, pidevate eeskirjadega, ja kõik, millel taolisi "häid" omadusi pole, on uuritav sedavõrd, kui hästi neid õnnestub lähendada taolise "hea" ja uurimiseks ligipääsetava objekti või eeskirjaga. Seoses praktilise eluga lisandub veel nõue lõplikumõõtmelisusest, kuna konkreetseid arvutusi saab teha ikka ainult lõpliku koguse koordinaatidega.

Järgnev Banachi ruumide teooria definitsioon (vt. definitsiooni 1), mille tõi sisse A. GROTHENDIECK oma monograafias [7], on kantud ka samast vaimust, tegeledes olukorraga, kus *kompaktse* hulga elemente ühtlaselt pidevalt lineaarselt lähendatakse elementidega lõplikumõõtmelisest ruumist. (Meenutame, et hulga kompaktsus tähendab, et hulk on kinnine ja suvalise arvu $\varepsilon > 0$ korral saab hulga katta lõpliku koguse ε-raadiusega keradega. Näiteks ruumis $\mathbb{R}^n$ on kompaktsed hulgad parajasti kinnised tõkestatud hulgad – lõigud, kinnised kerad, nende lõplikud ühendid jms.)

Siin ja edaspidi olgu X Banachi ruum (lihtsuse mõttes: üle reaalarvude korpuse). Sõna *operaator* on sünonüüm kujutusele (kasutame seda eeskätt juhul, kui lähte- ja sihthulk on Banachi ruum). Lineaarse operaatori S korral on kombeks $S(x)$ asemel kirjutada Sx.

[1]Indrek Zolk on 2012. a. Arnold Humala preemia laureaat.

Definitsioon 1. Kui kehtib järgmine tingimus:

$$\begin{gathered}\text{iga kompaktse hulga } K \subseteq X \text{ ja iga reaalarvu } \varepsilon > 0 \text{ korral}\\ \text{leidub pidev lineaarne operaator } S\colon X \longrightarrow X \text{ nii, et}\\ \text{kujutisruum } S[X] \text{ on lõplikumõõtmeline ja}\\ \text{kõigi elementide } x \in K \text{ jaoks } \|Sx - x\| < \varepsilon,\end{gathered} \tag{1}$$

siis öeldakse, et ruumil X on *aproksimatsiooniomadus* (a.o.).

Küsimus, **kas igal Banachi ruumil on aproksimatsiooniomadus** (edaspidi: *aproksimatsiooniprobleem*), püstitati tegelikult juba aastal 1936 nn. *Šoti raamatus*; lahendati alles 1972. Selle loo kirjelduse võib leida näiteks EVE OJA artiklist [11].

A. Grothendiecki monograafias [7] on tõestatud muuhulgas järgmised aproksimatsiooniprobleemi variandid.

Teoreem 1. *Järgmised väited on samaväärsed.*

1. *Igal Banachi ruumil on a.o..*

2. *Iga lõpmatu maatriksi*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

korral, kus read on nulliks koonduvad jadad ning reavektorite normide summa on lõplik, st.

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \lim_{j \longrightarrow \infty} a_{i,j} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \max\{|a_{i,j}| : j \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

kehtib implikatsioon

$$A \cdot A = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,i} = 0.$$

3. Iga pideva kahe muutuja funktsiooni $K\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *korral kehtib implikatsioon*

$$\left(\forall r, t \in [0,1] \quad \int_0^1 K(r,s) \cdot K(s,t)\,\mathrm{d}t = 0\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^1 K(s,s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Šoti raamatusse pandi kirja just tingimus 3. – selline ülesanne on mõistetav igale matemaatilist analüüsi kuulanud tudengile. Paneme ka tähele, et tingimuse 2. lõplikumõõtmeline analoog on tõene. Nimelt, kui $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, siis on vastavalt algebra põhiteoreemile maatriksil A täpselt n omaväärtust (karakteristlikku juurt), kusjuures nende summa on teatavasti just $a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}$. Teisalt, eeldusel $A^2 = 0$ on maatriksi A kõik omaväärtused võrdsed nulliga. Tõepoolest, A omaväärtuse λ korral $Ax = \lambda x$, kus $x \neq 0$ on vastav omavektor. Nüüd $A^2 = 0$ annab, et

$$0 = A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x,$$

mistõttu $\lambda^2 = 0$ ja järelikult $\lambda = 0$. Siit järeldubki, et omaväärtuste summa $a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}$ võrdub nulliga.

1972. aastal konstrueeris Per Enflo Banachi ruumi, millel puudub a.o. [4]; siit ka järeldub, et teoreemi 1 kõik tingimused on väärad. Enflo tulemus avas tee edasisteks uuringuteks – vaatame, mis välja tuleb, kui tugevdame/nõrgendame/muudame tingimuse (1) nõudeid; millised oleks samaväärsed või piisavad või tarvilikud tingimused selleks, et (1) ise või mõni tema muudetud versioon kehtiks jne. 20. sajandi jooksul saadud tulemused on hästi kokku võetud P. Casazza ülevaateartiklis [2].

Järgnev lause vormistab a.o. definitsioonis esinevad operaatorid perena; lause tõestamiseks sobib valida indekshulgaks $\{(K,\varepsilon)\colon K \text{ on kompaktne}, \varepsilon > 0\}$ koos järjestusega

$$(K_1, \varepsilon_1) \preccurlyeq (K_2, \varepsilon_2) \Longleftrightarrow K_1 \subseteq K_2 \wedge \varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2.$$

Lause 1. *Banachi ruumil X on a.o. parajasti siis, kui leidub pidevate lineaarsete operaatorite pere liikmetega $S_\alpha\colon X \longrightarrow X$ nii, et iga kompaktse hulga $K \subseteq X$ ja reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks α_0 omadusega*

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \sup_{x \in K} \|S_\alpha x - x\| < \varepsilon.$$

Definitsioon 2. Kui leidub $\lambda \geqslant 1$ nii, et tingimuses (1) kehtib lisaks veel $\|T\| \leqslant \lambda$, siis öeldakse, et ruumil X on *λ-tõkestatud a.o.* või *tõkestatud a.o.*. (Siin $\|T\| = \sup\{\|Tx\|\colon \|x\| \leqslant 1\}$.)

Muidugi saab sõnastada ja tõestada lause 1 analoogi ka tõkestatud a.o. jaoks. Täiendavalt on aga võimalik tõestada järgmine tulemus.

Lause 2. *Banachi ruumil X on λ-tõkestatud a.o. parajasti siis, kui leidub pidevate lineaarsete operaatorite pere liikmetega $S_\alpha\colon X \longrightarrow X$ nii, et $\|S_\alpha\| \leqslant \lambda$ ning iga elemendi $x \in X$ ja reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks α_0 omadusega*

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \|S_\alpha x - x\| < \varepsilon.$$

Lause 2 näitab, et tõkestatud a.o. puhul võib pere (S_α) *ühtlase koonduvuse kompaktsetel hulkadel* asendada *punktiviisilise* koonduvusega.

Kui Banachi ruum X on separaabel, see tähendab, kui seal leidub loenduv kõikjal tihe hulk, siis võib lauses 2 pere asendada jadaga.

Järgnev definitsioon muudab Banachi ruumis arvutamise mugavaks, võimaldades igale elemendile seada vastavusse tema koordinaatide jada.

Definitsioon 3. Jada $(e_n) \subseteq X$ nimetatakse *Schauderi baasiks*, kui iga $x \in X$ korral leidub üheselt määratud skalaaride jada $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ nii, et

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Lause 3. *Olgu X Banachi ruum, mille Schauderi baas on (e_n). Tähistame* osasummaoperaatorid S_n *järgmiselt:*

$$S_n(x) := \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n, \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in X.$$

Siis jada (S_n) täidab lause 2 tingimust, kusjuures $S_{n+k} \circ S_n = S_n \circ S_{n+k} = S_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral. Muuseas on igal baasiga Banachi ruumil tõkestatud a.o.

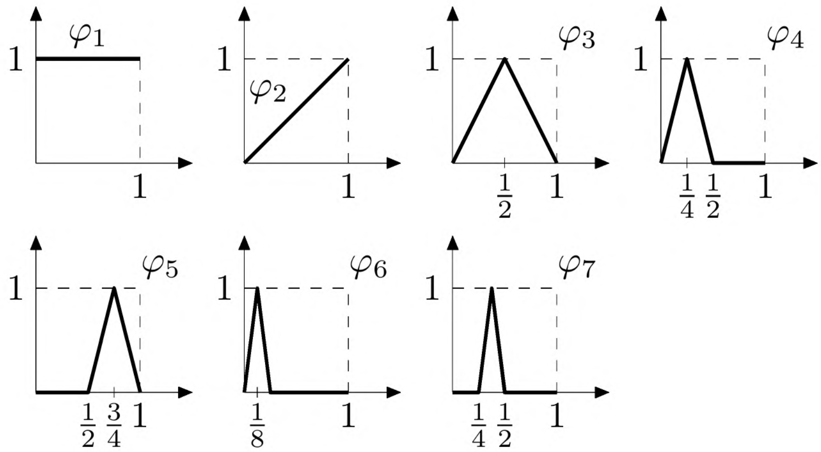
Kõigil klassikalistel Banachi ruumidel, nagu näiteks lõplikumõõtmelised ruumid, jadaruumid c_0, ℓ_p $(p \geqslant 1)$, funktsiooniruumid $C[a,b]$, $L_p(a,b)$ jne, on Schauderi baas, seega ka tõkestatud a.o..

Nii näiteks ülaltoodud jadaruumides on Schauderi baasiks

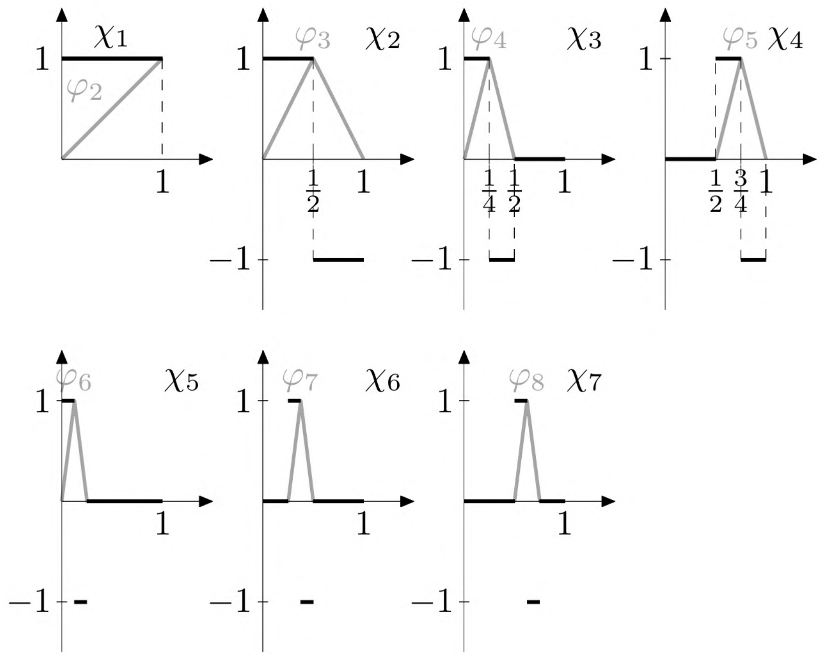
$$e_1 = (1,0,0,\ldots), \quad e_2 = (0,1,0,\ldots), \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad e_n = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n \text{ koordinaati}},1,0,0,\ldots), \quad \ldots.$$

Lõigus $[0,1]$ pidevate funktsioonide ruumis $C[0,1]$ on Schauderi baasiks Faber–Schauderi süsteem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, mille graafikud on toodud joonisel:



Lõigus $[0,1]$ integreeruva p-astmega funktsioonide ruumis $L_p(0,1)$ on Schauderi baasiks Haari süsteem $\chi_1, \chi_2, \ldots$, mille liikmed on Faber–Schauderi süsteemi funktsioonide tuletised:



Juba BANACH oma monograafias [1] märkis, et pole teada, kas igal Banachi ruumil on baas. Enflo kontranäitega sai see kasküsimus eitava vastuse.

Märgime samas, et enamik teadaolevaid Banachi ruume, millel puudub (mingit tüüpi) a.o., on spetsiaalselt konstrueeritud ning pole lihtsasti kirja pandavad. Paar erandit sellest "reeglist": ruumil $\mathcal{L}(\ell_2)$ (pidevad lineaarsed operaatorid ruumil ℓ_2) (SZANKOWSKI, 1981) ja ruumil $\mathcal{L}(\ell_2)/\mathcal{K}(\ell_2)$ (GODEFROY, SAPHAR, 1989) puudub a.o. (Siin $\mathcal{K}(\ell_2)$ tähistab kompaktseid operaatoreid ruumil ℓ_2, see tähendab operaatoreid T, mille korral ruumi ℓ_2 ühikkera $B_{\ell_2} = \{x \in \ell_2 \colon \|x\| \leqslant 1\}$ kujutis $T\,[B_{\ell_2}]$ on suhteliselt kompaktne hulk.)

Rõhutame, et lõpmatumõõtmelistes ruumides Schauderi baas (jada, mille suhtes iga element esitub rea summana) erineb alati algebralisest (Hameli) baasist (süsteem, mille suhtes iga element esitub lõpliku lineaarkombinatsioonina). Algebralise baasi kasutamine normeeritud ruumide kontekstis on üsna kasutu, sest koordinaatfunktsionaalide seast ainult ülimalt lõplik arv on pidevad.

2. Millega veel tegeldakse

Klassikaline (tõkestatud) aproksimatsiooniomaduse definitsioon võimaldab mitmel viisil saada uut laadi teooriaid. Põhjusi selleks on erinevaid – kas lihtsalt püüda saada midagi uut või hoopis konstrueerida abimõisteid, kontranäiteid, vahetulemusi mingi olemasoleva raske probleemi "ründamiseks".

Nimetame siinkohal mõnda a.o. arendusvõimalust.

- Mis jääb tõkestatud a.o. ja *baasiomaduse* (ruumil on Schauderi baas) vahele? Eritletakse järgmisi tõkestatud a.o. versioone:

  - lisatingimus $S_\alpha \circ S_\alpha = S_\alpha$ annab *π-omaduse* (lähendamine projektoritega),
  - lisatingimus $S_n \circ S_{n+k} = S_{n+k} \circ S_n = S_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) annab *lõplikumõõtmelise lahutuse*,
  - lisatingimus $S_\alpha \circ S_\beta = S_\beta \circ S_\alpha$ (separaabli ruumi korral $S_n \circ S_{n+k} = S_{n+k} \circ S_n$, kus $n, k \in \mathbb{N}$) annab *kommuteeruva tõkestatud a.o.*,
  - lisatingimus $\forall \alpha \lim_\beta \|S_\alpha \circ S_\beta - S_\beta \circ S_\alpha\| = 0$ annab *asümptootiliselt kommuteeruva tõkestatud a.o.*.

  Toome näiteks mõne tulemuse (vt. ülevaateartiklit [2], vt. ka [14]):

  - kui separaablil ruumil X on tõkestatud a.o., siis leidub $\lambda \geqslant 1$ ja pidevate lineaarsete operaatorite jada liikmetega $S_n\colon X \longrightarrow X$ nii, et

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n[X] \text{ on lõplikumõõtmeline}, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \|S_n\| \leqslant \lambda, \\ \forall x \in X \quad \|S_n x - x\| \longrightarrow 0, \\ \forall n, k \in \mathbb{N} \quad S_{n+k} \circ S_n = S_n; \end{cases}$$

- kui separaablil ruumil X on asümptootiliselt kommuteeruv λ-tõkestatud a.o., on tal ka kommuteeruv λ-tõkestatud a.o.;
- kui separaablil ruumil X on 1-tõkestatud a.o., siis on ruumil X ka kommuteeruv 1-tõkestatud a.o. (Casazza, Kalton, 1989).

Tulemused näitavad, et kuigi formaalselt nõutakse normi poolest tõkestatud lõplikumõõtmeliste operaatorite jada (S_n) jaoks ainult, et $S_n x \longrightarrow x$, saab mõnikord "teatud osa" kommuteeruvusest "lisaks kätte".

- Võib täpsemalt nõuda, kui hästi lähendavad operaatorid säilitavad ruumi X alamruumide struktuuri. Artikliga [5] käivitati järgmise omaduse uurimine: öeldakse, et *paaril* (X, U) *on a.o.* (U on ruumi X kinnine alamruum), kui kehtib tingimus (1) ning lisaks $T[U] \subseteq U$. Sama tüüpi omaduse saab sõnastada ka ruumi X kinniste alamruumide ahela $\mathcal{N} = \{U_\alpha\colon \forall \alpha, \beta\, U_\alpha \subseteq U_\beta \vee U_\alpha \supseteq U_\beta\}$ jaoks: *paaril* $(X, \mathcal{N})$ *on a.o.* tähendab, et kehtib (1) ning $T[U] \subseteq U$ iga kinnise alamruumi $U \in \mathcal{N}$ korral. On lahtine probleem, kas kehtib samaväärsus

$$\begin{aligned} &\text{paaril } (X, U) \text{ on a.o.} \quad \forall U \text{ (kinnised alamruumid)} \iff \\ &\iff \text{paaril } (X, \mathcal{N}) \text{ on a.o.} \\ &\qquad \forall \mathcal{N} \text{ (kinniste alamruumide ahelad).} \end{aligned}$$

- A. Grothendiecki monograafias [7] on näidatud, et ruumil X on a.o. parajasti siis, kui iga Banachi ruumi Y korral kehtib tingimus
$$\overline{\mathcal{F}(Y, X)} = \mathcal{K}(Y, X). \tag{2}$$

(Hulk $\mathcal{F}(Y,X)$ koosneb pidevatest lineaarsetest operaatoritest $T\colon Y \longrightarrow X$, mille korral $T[Y]$ on lõplikumõõtmeline.) Pole selge, kui väikese ruumide Y klassiga võib tingimuses (2) piirduda a.o. kirjeldamisel. Artiklis [9] on tõestatud, et ruumi X aproksimatsiooniomaduse jaoks piisab tingimuse $\overline{\mathcal{F}(Y,X)} = \mathcal{K}(Y,X)$ kehtimisest kõigi refleksiivsete separaablite Banachi ruumide Y jaoks, või ruumi c_0 kõigi kinniste alamruumide jaoks. Lahtine probleem: kas kehtib samaväärsus

$$\text{ruumil } X \text{ on a.o.} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\mathcal{F}(X,X)} = \mathcal{K}(X,X)?$$

- A.o. definitsioonis nõutakse iga kompaktse hulga K jaoks teatud lähendeid. Kui hulga K kompaktsus asendada mõne sarnase omadusega (nõrk kompaktsus [10], p-kompaktsus [3] jms), saadakse uued a.o. variandid.

- Lähendama ei pea sugugi lõplikumõõtmeliste operaatorite abil. Pea sama kaua on uuritud samasusteisenduse lähendamist kompaktsete operaatoritega. Arendatakse ühtset teooriat, kus lähendavad operaatorid on valitud mingist *operaatorideaalist*: lõplikumõõtmelised, kompaktsed, nõrgalt kompaktsed operaatorid, tuumaoperaatorid, integraaloperaatorid jms. Operaatorideaali mõiste ja teooria alused andis Pietsch [15].

  Sõltuvalt ruumile X seatud lisanõuetest võib kitsendada lähendavate operaatorite valikut, nt. kui ruumil X on tehetega kooskõlas olev järjestus, võib lähendamiseks kasutada *positiivseid* operaatoreid, st. operaatoreid T, et iga $x \geqslant 0$ korral $Tx \geqslant 0$ (*positiivne a.o.*). Lahtine probleem: kas iga Banachi võre X korral kehtib implikatsioon

$$\text{ruumil } X \text{ on a.o.} \quad \Longrightarrow \quad \text{ruumil } X \text{ on positiivne a.o.?}$$

- Klassikaline tingimus (λ-tõkestatud a.o. jaoks) on, et peab leiduma lõplikumõõtmeliste operaatorite pere (S_α) omadustega $\sup\limits_\alpha \|S_\alpha\| \leqslant \lambda$ ja $\|S_\alpha x - x\| \longrightarrow 0$. Nõudes, et iga Banachi ruumi Y ja operaatori $T\colon X \longrightarrow Y$ korral (kus T on valitud mingist *Banachi operaatorideaalist* $\mathcal{A}$) leiduks talle vastav lõplikumõõtmeliste operaatorite pere (S_α) omadustega, et $\limsup\limits_{\alpha} \|T \circ S_\alpha\|_{\mathcal{A}} \leqslant \lambda \|T\|_{\mathcal{A}}$ ja $\|S_\alpha x - x\| \longrightarrow 0$, saame *$\lambda$-tõkestatud a.o. $\mathcal{A}$ jaoks.* See mõiste on λ-tõkestatud a.o. nõrgem variant ning võiks aidata lahendada lahtist probleemi: kas iga kaasruumi X^* (ehk pidevate lineaarsete funktsioonide $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ruumi) jaoks kehtib implikatsioon

$$\text{ruumil } X^* \text{ on a.o.} \quad \Longrightarrow \quad \text{ruumil } X^* \text{ on 1-tõkestatud a.o.?}$$

Probleem on lahendatud (positiivselt) teatud erijuhtudel (nt. kui X^* on separaabel). Selleteemalised ülevaateartiklid on [12], [13].

- Kõigis ülaltoodud a.o. versioonides on siiski nõutud, et lähendavad operaatorid oleks lineaarsed (nn. klassikaline teooria). Seda tingimust saab nõrgendada; küllalt sügavalt uuritud on Lipschitzi kujutustega ja ühtlaselt pidevate kujutustega lähendamist (vt. nt. [8]). Osutub, et mõnevõrra määravad ka mittelineaarsed kujutused lineaarse struktuuri omadusi ning võimaldavad neid üle kanda. Tüüpiliselt kasutatakse töövahendina mõnda keerukamat ruumi (teine kaasruum, Lipschitzi vabaruum, ultraastmed vms.), et Lipschitzi kujutusi lineariseerida. Näiteks näitab vahetu kontroll, et tõkestatud a.o. kandub ühelt ruumilt teisele üle isomorfismi (lineaarne sürjektsioon, mis viib normi ekvivalentseks normiks) kaudu; Lipschitzi vabaruume kasutades saab aga tõestada [6], et tõkestatud a.o. kandub üle ka Lipschitz-isomorfismi ((üldiselt mittelineaarne) bijektsioon, mis ise ja mille pöördkujutus on Lipschitzi kujutused) kaudu.

Autor soovib mainida Eesti Haridus- ja Teadusministeeriumi institutsionaalset uurimistoetust IUT20-57.

Kirjandus

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne 1, Z Subwencjyi Funduszu Kultury Narodowej, Warsaw, 1932.

[2] P. G. Casazza, *Approximation properties*, Handbook of the Geometry of Banach spaces, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 2001, lk. 271–316.

[3] J. M. Delgado, E. Oja, C. Piñeiro, E. Serrano, *The p-approximation property in terms of density of finite rank operators*, J. Math. Anal. Appl. **354** (2009), 159–164.

[4] P. Enflo, *A counterexample to the approximation property in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317.

[5] T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pełczyński, *Some approximation properties of Banach spaces and Banach lattices*, Israel J. Math. **183** (2011) 199–231.

[6] G. Godefroy, N. J. Kalton, *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math. **159** (2003), 121–141.

[7] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[8] N. J. Kalton, *The nonlinear geometry of Banach spaces*, Rev. Mat. Complut. **21** (2008), 7–60.

[9] Å. Lima, O. Nygaard, E. Oja, *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property*, Israel J. Math. **119** (2000), 325–348.

[10] E. Odell, H.–O. Tylli, *Weakly compact approximation in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 1125–1159.

[11] E. OJA, *Banachi ruumide aproksimatsiooniomadused ja kaasruumide geomeetria*, EMS aastaraamat 2001, Tartu, Eesti Matemaatika Selts, 2003.

[12] E. OJA, On bounded approximation properties of Banach spaces, in: Banach Algebras 2009, vol. 91, Banach Center Publications, Polish Acad. Sci. Inst. Math, Warsaw, 2010, pp. 219–231.

[13] E. OJA, Bounded approximation properties via Banach operator ideals, in: Advanced Courses of Mathematical Analysis IV, World Sci. Publ, Hackensack, NJ, 2012, pp. 196–215.

[14] E. OJA, I. ZOLK, *The asymptotically commuting approximation property of Banach spaces*, Jour. Funct. Anal., **266** (2014), 1068–1087.

[15] A. PIETSCH, *Operator Ideals*, Volume 16 of Mathematische Monographien, Deutscher Verlag d. Wiss., VEB, 1978.

Kumerad aproksimatsiooniomadused

Aleksei Lissitsin[1]
Tartu Ülikool

Selles artiklis jätkame aproksimatsiooniomaduse (edaspidi kasutame ka lühendit a.o.) erinevate versioonide tutvustamist, mille alguse leiab Eve Oja ja Indrek Zolki artiklitest käesolevas aastaraamatus. Et ei oleks palju kordamist, eeldan, et lugeja on juba tutvunud nimetatud artiklitega. Jutustan oma doktoritööst (kaitstud Eve Oja juhendamisel) ja sellega seotud teemadest.

Nagu on juba öeldud, aproksimatsiooniprobleem oli lahtine ligikaudu 40 aastat kuni Per Enflo lahendas selle negatiivselt 1972. aastal konstrueerides Banachi ruumi ilma aproksimatsiooniomaduseta. Albrecht Pietsch oma Banachi ruumide ajaloo raamatus väljendas seda järgmiselt:

"Elu teatud aproksimatsiooniomadustega Banachi ruumides on palju lihtsam. Seega Enflo kontranäite mõju võib kirjeldada Paradiisist pagendamisena. Pärismaailmas aga leiduvad: separaablid ruumid ilma Schauderi baasita, kompaktsed operaatorid, mis pole lähendatavad lõplikumõõtmeliste operaatoritega, jäljeklassioperaatorid ilma jäljeta, [...]".

Võib öelda, et Banachi ruumide elu osutus hoopis mitmekesisemaks, kui arvati varem. Mitmed autorid hakkasid kohe uurima a.o. erinevaid modifitseeritud versioone. Kordame mõned neist.

1) *Tõkestatud a.o.* Figiel ja Johnson tõestasid aastal 1973, et a.o.-st ei järeldu tõkestatud a.o. Meenutame, et on lahtine küsimus, kas kaasruumi a.o. on alati tõkestatud (või isegi meetriline ehk tõkestatud konstandiga 1).

2) *Kompaktne a.o.* Aastal 1992 näitas Willis, et tõkestatud kompaktsest a.o.-st ei järeldu (tavaline) a.o.

3) *Operaatorideaali ja lihtsalt operaatorite ruumi alamruumi poolt defineeritud a.o.* See mõiste on vahetuks üldistuseks eelmisele, seda a.o. on uurinud nt Reinov 1980-ndate aastate alguses, samuti Grønbæck ja Willis 1990-ndatel aastatel.

[1]Aleksei Lissitsin on 2013. a. Arnold Humala preemia laureaat.

4) *Banachi võrede positiivne a.o.* Meenutame, et selle omaduse kohta pole teada, kas Banachi võrede klassis see erineb a.o.-st. Viimased olulisemad tulemused selle kohta on NIELSENI 1988. aasta artiklis [8].

Erinevate versioonide uurimisega olid seotud ka küsimused, kuidas saab a.o. omadusi tugevdada või nõrgendada, et omadus ikka jääks samaks.

5) *Kompaktsete operaatorite lähendamine teistes topoloogiates.* Meenutame, et Grothendiecki kriteerium ütleb, et ruumil X on a.o. parajasti siis kui iga kompaktne operaator $T \in \mathcal{K}(Y,X)$ on lähendatav lõplikumõõtmeliste operaatoritega (normi topoloogias) ehk $\overline{\mathcal{F}(Y,X)} = \mathcal{K}(Y,X)$ iga Banachi ruumi Y korral. Kuna norm on pidev enda poolt indutseeritud topoloogias, siis viimane võrdus on samaväärne vastava "meetrilise versiooniga" ehk võrdusega ühikkerade jaoks $\overline{B_{\mathcal{F}(Y,X)}} = B_{\mathcal{K}(Y,X)}$, s.t. iga kompaktne operaator $T \in \mathcal{K}(Y,X)$ on lähendatav lõplikumõõtmeliste operaatoritega $S_\alpha \in \mathcal{F}(Y,X)$, mille norm ei ületa operaatori T normi. LIMA, NYGAARD ja Oja [3] näitasid aastal 2000, et normi topoloogia asemel võib siin vaadelda hoopis punktiviisi koondumise topoloogiat: ruumil X on a.o. parajasti siis, kui $\overline{B_{\mathcal{F}(Y,X)}}^{\mathrm{SOT}} = B_{\mathcal{W}(Y,X)}$ iga Y korral (siin SOT tähistab tugevat operaatorite topoloogiat ehk punktiviisi koondumise topoloogiat, mille korral $T_\alpha \xrightarrow[\mathrm{SOT}]{} T$ parajasti siis, kui $T_\alpha y \longrightarrow Ty$ iga $y \in Y$ korral; $\mathcal{W}$ on nõrgalt kompaktsete operaatorite ideaal). Sarnased kirjeldused kompaktse a.o. kohta on saadud ka Lima, Lima, Nygaardi, Oja ja PELANDERI töödes aastatel 2003–2004.

Kumera a.o. mõiste defineerisime esmakordselt minu, KRISTEL MIKKORI ja Eve Oja 2008. aasta artiklis [6], mille üheks esialgseks eesmärgiks oli üldistada punktis 5) toodud kriteeriumid punktiviisi koonduvuse topoloogias alamruumi poolt defineeritud a.o.-dele. Kõrvalmärkusena panime tähele, et mitmed meie tulemused kehtivad ka üldisemal juhul, kus lähendavate operaatorite hulgalt on nõutud ainult tema kumerus ja nulli sisaldavus.

Definitsioon 4. Olgu $A \subset \mathcal{L}(X)$ kumer hulk, mis sisaldab nulli (kasutame siin ja analoogilistes kohtades lühendit $\mathcal{L}(X) :=$

$\mathcal{L}(X,X)$). Öeldakse, et ruumil X on A-aproksimatsiooniomadus (A-a.o.), kui iga $\varepsilon > 0$ ja iga kompaktse hulga $K \subset X$ korral leidub operaator $T \in A$ nii, et $\sup_{x\in K} \|Tx - x\| < \varepsilon$, teiste sõnadega ruumi X ühikoperaator I_X on lähendatav kompaktsetel hulkadel ühtlaselt operaatoritega hulgast A.

Näiteks järgmised väited on samaväärsed:

(i) Ruumil X on A-a.o.

(ii) Iga Banachi ruumi Y korral iga kompaktne operaator $T \in \mathcal{K}(Y,X)$ on lähendatav normi topoloogias operaatoritega hulgast

$$A \circ \{T\} := \{ST \mid S \in A\},$$

mille normid ei ületa operaatori T normi ehk

$$T \in \overline{B_{A\circ\{T\}}} \quad \forall T \in B_{\mathcal{K}(Y,X)}$$

(tähistame siin hulga H jaoks $B_H := \{x \in H \mid \|x\| \leqslant 1\}$).

(iii) Iga *separaabli ja refleksiivse* ruumi Y korral iga kompaktne operaator $T \in \mathcal{K}(Y,X)$ on lähendatav *punktiviisi koondumise* topoloogias operaatoritega hulgast $A \circ \{T\}$, mille normid ei ületa operaatori T normi ehk

$$T \in \overline{B_{A\circ\{T\}}}^{\mathrm{SOT}} \quad \forall T \in B_{\mathcal{K}(Y,X)}.$$

Märgime, et juba kompaktse a.o. juhul tingimused (ii) ja (iii) peavad olema sellisel "välisel" kujul, sest vastav "sisene" kuju $B_{\mathcal{K}(Y,X)} = \overline{B_{\mathcal{K}(Y,X)}}$ kehtib triviaalselt iga Banachi ruumi X korral.

Paneme tähele, et tingimus (iii) võimaldab piirduda ainult separaablite ja refleksiivsete ruumidega Y (ilmselt see on vabatahtlik, sest suund (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) on triviaalne). Grothendiecki kriteeriumi jaoks oli see teada ammu – see järeldub kuulsast Davis–Figiel–Johnson–Pełczyński faktorisatsioonilemmast [1]: iga nõrgalt kompaktne operaator $T \in \mathcal{W}(X,Y)$ faktoriseerub läbi refleksiivse ruumi Z ehk $T = SR$, kus $R \in \mathcal{W}(X,Z)$, $S \in \mathcal{W}(Z,Y)$. Vastava meetrilise versiooni jaoks aga sai see võimalikuks alles pärast DFJP-faktorisatsioonilemma isomeetrilise versiooni (kus $\|T\| = \|S\|\|R\|$) ilmumist Lima, Nygaardi ja Oja artiklis 2000. aastal. See DFJP–LNO faktorisatsioonilemma on üks põhitööriistadest kumerate a.o.-te uurimisel.

Miks selline üldistus nagu kumerad aproksimatsiooniomadused on üldse kasulik? Esiteks, paneme tähele, et punktides 1–4 vaadeldud a.o. versioonid on kõik kumera a.o. erijuhud. Punktides 2) ja 3) on hulk A alamruum. Punktis 1) on tegemist teatud alamruumi ühikkeraga $A = B_{\mathcal{F}(X,X)}$. Punktis 4) võrdub hulk A positiivsete lõplikumõõtmeliste operaatorite koonusega $\mathcal{F}_+(X, X)$.

Teiseks, osutub, et suur osa klassikalisest a.o. teooriast ja analoogilistest tulemustest a.o. nimetatud variantide kohta on tehtav sellises üldises kontekstis.

Miks just kumerad hulgad? Kuigi tõepoolest, mõned vaadeldud tulemused (näiteks tingimus (b) üleval) on saavutatavad ka üldisemas kontekstis, kus hulgalt A pole kumerust nõutud, osutub, et huvitavamate tulemuste jaoks on vaja kasutada Hahn-Banachi teoreemi ja operaatorite ruumi $(\mathcal{L}(X, Y), \tau_c)$ kaasruumi Grothendiecki kirjeldust (siin τ_c tähistab kompaktsetel hulkadel ühtlase koonduvuse topoloogiat). Meenutame, et lokaalselt kumeras ruumis hulga H sulundid esialgses topoloogias ja nõrgas (ehk kaasruumi poolt indutseeritud) topoloogias ühtivad, kui H on kumer.

Loetleme tulemusi, mida saime korrata kumerate a.o. kontekstis.

(a) *Juba toodud Grothendiecki kriteeriumi analoogid.*

(b) *A.o. tõstmine Banachi ruumist tema kaasruumile.* Kuigi on teada, et Banachi ruumi a.o. ega tõkestatud a.o. ei pärine tema kaasruumile (st leidub Banachi ruum X, millel on omadus, aga kaasruumil X^* pole), Johnson (juba aastal 1972) tõestas järgmise tõstmisteoreemi: kui Banachi ruumil X on olemas meetriline a.o. iga ekvivalentse normi korral, siis ka kaasruumil X^* on meetriline a.o.

Kumera a.o. versioon: kui Banachi ruumil X on olemas meetriline A-a.o. (st B_A-a.o. ehk $\{S \in A \mid \|S\| \leqslant 1\}$-a.o.) igas ekvivalentses normis, siis kaasruumil X^* on meetriline A^a-a.o., kus

$$A^a := \{T^* : T \in A\} \subset \mathcal{L}(X^*, X^*).$$

(c) *A.o. pärinemine kaasruumist lähteruumi.* Kui kaasruumil X^* on A^a-a.o., siis lähteruumil X on A-a.o.

Märgime, et klassikaline tulemus ütleb siin natuke rohkemat: kui ruumil X^* on a.o. (ehk $\mathcal{F}(X^*)$-a.o.), siis lähteruumil X on a.o. (ehk $\mathcal{F}(X)$-a.o.). Teiste sõnadega klassikaline tulemus seisneb üldisest kumerate a.o.-te tulemusest ja samaväärsusest $\mathcal{F}(X^*)$-a.o. $\iff$ $\mathcal{F}(X)^a$-a.o. ruumi X^* jaoks. Viimane samaväärsus on samuti Johnsoni poolt ammu märgitud fakt.

Positiivse a.o. ehk $\mathcal{F}_+(X)$-a.o. (kus $\mathcal{F}_+$ tähistab positiivsete lõplikumõõtmeliste operaatorite koonust) korral samuti tõestasime artiklis [7] vastava samaväärsuse $\mathcal{F}_+(X^*)$-a.o. $\iff$ $\mathcal{F}_+(X)^a$-a.o.

(d) *Radon–Nikodými omaduse mõju ehk punktis 1) toodud küsimusele osaline vastus.* Kui kaasruumil X^* on Radon–Nikodými omadus (selle erijuhud on nt: X^* on separaabel või X on refleksiivne) ja a.o., siis kaasruumil X^* on meetriline a.o.

Sellel tulemusel on läbi aegade olnud mitmed ja väga erinevad tõestused. Esimene neist sisuliselt sisaldub juba Grothendiecki 1953. aasta memuaaris.

Kumera a.o. versioon: olgu $A \subset \mathcal{K}(X)$ (ning kumer ja nulli sisaldav) ja olgu kaasruumil X^* Radon–Nikodými omadus; kui ruumil X^* on A^a-a.o., siis tal on ka meetriline A^a-a.o.

(e) *Nõrk tõkestatud a.o. on samaväärne tõkestatud a.o. Asplundi operaatorideaali jaoks.*

Oja ja Å. Lima tõid 2005. aastal sisse nõrga tõkestatud a.o. mõiste, mis istub a.o. ja tõkestatud a.o. vahel. Selle mõiste abil nad esitasid punktis (d) toodud tulemuse tõestuse versiooni. Nimelt, osutub, et kaasruumi X^* a.o. on samaväärne lähteruumi nõrga meetrilise a.o.-ga igas ekvivalentses normis. Samuti osutub, et Radon–Nikodými omaduse olemasolul nõrk meetriline a.o. on samaväärne meetrilise a.o.-ga. Jääb rakendada meetrlise a.o. tõstmisteoreemi, et lähteruumi meetrilisest a.o.-st igas ekvivalentses normis saada kaasruumi meetrilise a.o. Kogu see arutelu kehtib ka kumerate a.o.-te jaoks.

Nõrk tõkestatud a.o. on erijuht üldisemast mõistest – operaatorideaali jaoks tõkestatud a.o.-st (sisse toodud Å. Lima, V. Lima ja Oja poolt aastal 2010). Anname definitsiooni kumerate a.o. kontekstis (originaalis muidugi $A = \mathcal{F}(X)$). Öeldakse, et ruumil X on λ-tõkestatud A-a.o. operaatorideaali $\mathcal{A}$ jaoks, kui iga operaatori $T \in \mathcal{A}(X, Y)$ korral ruumil X on $\{S \in A \mid \|TS\| \leqslant \lambda\|T\|\}$-a.o. Nõrk tõkestatud a.o. := tõkestatud a.o. $\mathcal{K}$ jaoks.

Radon–Nikodými omaduse mõju võib väljendada ka järgmise nõrga tõkestatud a.o. kriteeriumiga. Olgu $A \subset \mathcal{K}(X)$ kumer ja nulli sisaldav. Siis järgmised väited on samaväärsed.

(i) Ruumil X on nõrk tõkestatud A-a.o.

(ii) Ruumil X on tõkestatud A-a.o. $\mathcal{W}$ jaoks.

(iii) Ruumil X on tõkestatud A-a.o. $\mathcal{RN}^{\mathrm{dual}}$ jaoks. (Siin

$$\mathcal{RN}^{\mathrm{dual}} = \{T \mid T^* \in \mathcal{RN}\}$$

on Radon–Nikodými operaatorite ideaali duaalne operaatorideaal ehk Asplundi operaatorite ideaal.)

Mainime, et samaväärsus (i) $\iff$ (iii) vastab artiklis [2] püstitatud küsimusele: kas leidub ideaalist $\mathcal{W}$ suurem operaatorideaal, mille jaoks tõkestatud a.o. ühtib nõrga tõkestatud a.o.-ga? Selle tõestuseks artiklis [5] sisuliselt piisas panna tähele, et DFJP-LNO-faktorisatsioon töötab (peale kompaktsete ja nõrgalt kompaktsete) ka Asplundi operaatorite faktoriseerimiseks.

Autor soovib mainida Eesti Haridus- ja Teadusministeeriumi institutsionaalset uurimistoetust IUT20-57.

Kirjandus

[1] W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson, and A. Pełczyński, *Factoring weakly compact operators*, J. Funct. Anal. **17** (1974) 311–327.

[2] Å. Lima, V. Lima, and E. Oja, *Bounded approximation properties via integral and nuclear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010) 287–297.

[3] Å. Lima, O. Nygaard, and E. Oja, *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property*, Israel J. Math. **119** (2000) 325–348.

[4] Å. Lima and E. Oja, *The weak metric approximation property*, Math. Ann. **333** (2005) 471–484.

[5] A. Lissitsin, *A unified approach to the strong and the weak bounded approximation properties of Banach spaces*, Studia Math. **211** (2012) 199–214.

[6] A. Lissitsin, K. Mikkor, and E. Oja, *Approximation properties defined by spaces of operators and approximability in operator topologies*, Illinois J. Math. **52** (2008) 563–582.

[7] A. Lissitsin and E. Oja, *The convex approximation property of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **379** (2011) 616–626.

[8] N.J. Nielsen, *The positive approximation property of Banach lattices*, Israel J. Math. **62** (1988) 99–112.

Rajaülesannete lahendamine ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetodil

ERGE IDEON[1]
Eesti Maaülikool

Sissejuhatus

Paljud matemaatika, füüsika ja teiste teadusalade probleemid on formuleeritavad rajaülesannete kujul. Vaatleme harilikku teist järku diferentsiaalvõrrandi rajaülesannet

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (a, b),$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Eeldame, et ülesandel on olemas lahend, mis on piisava siledusega ja p, q, f on pidevad ning $q(x) \leqslant q < 0$, $x \in (a, b)$. Sellisel juhul on lahend ühene. Traditsioonilised meetodid rajaülesannete lahendamiseks on võrgumeetod, mis annab ainult diskreetse lahendi [1, 2], ja kollokatsioonimeetod polünomiaalsete splainidega. Polünomiaalsed m-järku splainid (defektiga k) on tükiti polünomiaalsed funktsioonid, mis igas vaadeldava lõigu osalõigus on ülimalt m-astme polünoomid, kuid tervikuna moodustavad nõutava siledusega funktsiooni ehk on kogu lõigus $m - k$ korda pidevalt diferentseeruvad. Termin splain, mida tutvustas esmalt SCHOENBERG aastal 1946 [11] tuleneb inglisekeelsest sõnast *spline*, mis tähendab elastset varrast, mida kasutati siledate kõverate joonestamisel läbi antud punktide.

Rajaülesande lahendamist ruut-ja kuupsplainidega kollokatsioonimeetodil on uurinud mitmed autorid. On teada, et ruut- ja kuupsplainide korral põhineb kollokatsioonimeetodi koonduvuskiiruse $O(h^2)$ tõestus interpoleerimise super-koonduvusel [7, 10]. Klassikalises interpoleerimisülesandes on antud sõlmed ja neile vastavad funktsiooni väärtused x_i, $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, ning tuleb

[1]Erge Ideon on 2014. a. Arnold Humala preemia laureaat

taastada funktsioon f. Interpolatsiooniülesandes ruutsplainidega on antud funktsioon $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja väärtused $\bar{y}_i$, $i = 1,\ldots,n$, sõlmedes $\xi_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, $i = 1,\ldots,n$. Splaini S parameetrite määramiseks nõutakse, et $S(\xi_i) = \bar{y}_i$, $i = 1,\ldots,n$. Lisatakse lõigu otspunktidega seotud tingimused $S(a) = \alpha_1$, $S(b) = \alpha_2$ või $S'(a) = \alpha_1, S'(b) = \alpha_2$. Kuupsplainidega interpolatsiooniülesandes on antud sõlmedes x_i, $i = 0,\ldots,n$, väärtused y_i, $i = 0,\ldots,n$, ning otsitakse splaini S, mis rahuldaks tingimusi $S(x_i) = y_i$, $i = 0,\ldots,n$. Lisatakse ka $S(a) = \alpha_1, S(b) = \alpha_2$ või $S'(a) = \alpha_1, S'(b) = \alpha_2$. Peale koonduvuskiiruse on interpoleerimise korral teada, et ratsionaalsplainid lähendavad mõningaid funktsioone paremini kui polünomiaalsed splainid [9]. Sellepärast võivad ratsionaalsplainid anda ka mõnedes rajaülesannetes paremaid tulemusi. Järgnevalt tutvustame doktoritöö [5] tulemusi. Töö põhiprobleemiks on rajaülesande lahendamine lineaar/lineaar ja ruut/lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsiooni-meetodil ning nende meetodite võrdlemine hästi uuritud ruut-ja kuupsplainidega kollokatsioonimeetoditega.

Lineaar/lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetod

Vaatleme ühtlase jaotusega lõiku $[a,b]$ punktidega $x_i = a + ih$, $i = 0,\ldots,n$, $h = (b-a)/n$, $n \in \mathbb{N}$. Defineerime ka punktid $\xi_i = x_{i-1} + h/2$, $i = 1,\ldots,n$.

Lineaar/lineaar ratsionaalsplain on funktsioon $S \in C^1[a,b]$ kujul

$$S(x) = a_i + \frac{c_i(x-\xi_i)}{1 + d_i(x-\xi_i)}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

kus $1 + d_i(x-\xi_i) > 0$. Saab anda ka esituse üldisemalt

$$S(x) = \frac{\hat{a}_i + \hat{b}_i x}{\hat{c}_i + \hat{d}_i x},$$

kus $\hat{c}_i + \hat{d}_i x < 0$ või $\hat{c}_i + \hat{d}_i x > 0$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Kollokatsioonimeetodis nõuame, et splain S rahuldaks diferentsiaalvõrrandit punktides ξ_i ja lisaks rajatingimusi

$$S''(\xi_i) + p(\xi_i)S'(\xi_i) + q(\xi_i)S(\xi_i) = f(\xi_i), \quad i = 1, \dots, n,$$
$$S(a) = \alpha, \quad S(b) = \beta.$$

Lisame nõudest $S \in C^1[a, b]$ tulevad splaini sisestruktuuri kirjeldavad võrrandid ja jõuame mittelineaarse võrrandisüsteemini splaini parameetrite määramiseks, mille lahendamiseks sobivad harilik iteratsioonimeetod, Gauss-Seideli või Newtoni meetod. Võrdluseks võib tuua, et ruutsplainidega kollokatsioonimeetod on olemuselt lineaarne, sest see viib splaini kordajate määramiseni lineaarsest süsteemist. Kuna lineaar/lineaar ratsionaalsplain on monotoonne, siis on mõtet rajaülesannet selliste splainidega ligikaudselt lahendada vaid siis, kui on teada, et rajaülesande täpne lahend on sama omadusega.

Kollokatsioonimeetodi uurimiseks näidatakse doktoritöös kõigepealt, et interpoleeriva lineaar/lineaar ratsionaalsplaini S ja piisavalt sileda funktsiooni y jaoks, mille korral $y'(x) > 0$, $x \in [a, b]$, tekib superkoondumine punktides x_i: $S(x_i) = y(x_i) + O(h^4)$, $i = 0, \dots, n$. Tõestatakse ka superkoondumine splaini S esimeste tuletiste jaoks $S'(x) = y'(x) + O(h^3)$ punktides $x = \xi_i + th$, $t = \pm\sqrt{3}/6$, $i = 1, \dots, n$, ning samuti näidatakse, et teiste tuletiste jaoks kehtib $S''(\xi_i) = y''(\xi_i) + O(h^2)$, $i = 1, \dots, n$. Saadud tulemused on avaldatud artiklis [3]. Lineaar/lineaar ratsionaalsplainidega interpolatsiooniülesande esitus on sama nagu ruutsplainidega. Varasemast on teada tulemused ruutsplainidega meetodi superkoondumise kohta. Need leiavad aset samades punktides nagu lineaar/lineaar ratsionaalsplainide korral [8]. Samuti on varasemalt tõestatud interpoleeriva lineaar/lineaar ratsionaalsplaini olemasolu ja ühesus ning et see säilitab geomeetrilisi omadusi nagu monotoonsus [9].

Doktoritöös analüüsitakse ratsionaalsplaini parameetreid määravat mitte-lineaarset võrrandisüsteemi ning tõestatakse lineaar/-lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetodi korral Bohl-Brouweri püsipunkti printsiipi kasutades lahendi olemasolu. Tegemist on $O(h^2)$ koondumisega ja kehtivad hinnangud, kus on välja eraldatud pealiige, mis kajastab sõltuvust diferentsiaalvõrrandi ja rajatingimuste kordajatest

$$\|S-y\|_\infty \leqslant$$
$$\frac{h^2}{24}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{y^{IV}-py'''-6\frac{y'''y''}{y'}+6\frac{(y'')^3}{(y')^2}+\frac{3}{2}p\frac{(y'')^2}{y'}}{q}(\xi_i)\right|+o(h^2),$$

$\|S'-y'\|_\infty = O(h^2)$ ja $\|S''-y''\|_\infty = O(h)$. Võrdluseks on varasemast teada (vt [10]) ruutsplainide korral kehtiv

$$\|S-y\|_\infty \leqslant \frac{h^2}{24}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{y^{IV}-py'''}{q}(\xi_i)\right|+o(h^2).$$

Märgime veel, et doktoritööst leiab mitu erinevat esitust lineaar/lineaar ratsionaalsplainidele ning tõestustes kasutatakse splaini esitust splaini väärtuste $S_i = S(x_i)$, $i=0,\dots,n$, $\bar{S}_i = S(\xi_i)$, $i=1,\dots,n$, kaudu kujul

$$S(x) = \bar{S}_i + \frac{4(S_i-\bar{S}_i)(\bar{S}_i-S_{i-1})(x-\xi_i)}{h(S_i-S_{i-1})+2((\bar{S}_i-S_{i-1})-(S_i-\bar{S}_i))(x-\xi_i)},$$
$$x\in[x_{i-1},x_i].$$

Saadud tulemused lineaar/lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetodi kohta on avaldatud artiklis [6]

Ruut/lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetod

Vaatleme ühtlase jaotusega lõiku $[a,b]$ punktidega $x_i = a+ih$, $i=0,\dots,n$, $h=(b-a)/n$, $n\in\mathbb{N}$. Ruut/lineaar ratsionaalsplain on funktsioon $S\in C^2[a,b]$, millel on igas osalõigus kuju

$$S(x) = a_i + b_i(x-x_{i-1}) + \frac{c_i}{1+d_i(x-x_{i-1})},\quad x\in[x_{i-1},x_i],$$

kus $1 + d_i(x - x_{i-1}) > 0$. Üldisemalt saab sellele splainile anda esituse ka viie parameetri abil

$$S(x) = \frac{\hat{a}_i + \hat{b}_i x + \hat{c}_i x^2}{\hat{d}_i + \hat{e}_i x}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

kus $\hat{d}_i + \hat{e}_i x < 0$ või $\hat{d}_i + \hat{e}_i x > 0$. Ruut/lineaar ratsionaalsplain S (või $-S$) on kumer lõigus $[a, b]$, seega on mõtet rajaülesannet selliste splainidega ligikaudselt lahendada vaid siis, kui on teada, et rajaülesande täpne lahend on sama omadusega.

Kollokatsioonimeetodis nõutakse, et splain S rahuldaks diferentsiaalvõrrandit punktides x_i ning rajatingimusi vastavalt

$$\begin{aligned} &S''(x_i) + p(x_i)S'(x_i) + q(x_i)S(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n, \\ &S(a) = \alpha, \quad S(b) = \beta. \end{aligned}$$

Need võrrandid moodustavad koos splaini sisestruktuuri kirjeldavate võrranditega jällegi mittelineaarse võrrandisüsteemi splaini parameetrite määramiseks.

Ruut/lineaar ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetodi uurimiseks alustatakse uurimist interpolatsiooniülesandest, mis on sama nagu kuupsplainidega. Eeldades, et $y''(x) > 0$, $x \in [a, b]$, on saadud superkoonduvuse tulemused interpoleeriva ruut/lineaar ratsionaalsplainide ja piisavalt sileda funktsiooni y jaoks $S'(x) = y'(x) + O(h^4)$, punktides $x = x_i$, $i = 0, \ldots, n$, ja $x = (x_{i-1} + x_i)/2$, $i = 1, \ldots, n$, $S''(x) = y''(x) + O(h^3)$ punktides $x = x_i + th$, kus $t = (3 \pm \sqrt{3})/6$, $i = 0, \ldots, n$, ja $S'''(x) = y'''(x) + O(h^2)$, kus $x = (x_{i-1} + x_i)/2$, $i = 1, \ldots, n$. Punktid on samad nagu kuupsplainide korral [12] Saadud tulemused on avaldatud artiklis [4].

Tõestuste jaoks on splain viidud esitusele väärtuste $S(x_i) = S_i$, $i = 0, \ldots, n$, ja teiste momentide $S''(x_i) = M_i$, $i = 0, \ldots, n$, kaudu. Kasutades tulemusi superkoondumisest interpoleerimisel ning

Bohl-Brouweri püsipunkti printsiipi saab näidata lähislahendi S olemasolu ning

$$\|S-y\|_\infty \leqslant \frac{h^2}{12} \max_{1\leqslant i\leqslant n-1} \left| \frac{y^{IV} - \frac{4}{3}\frac{(y''')^2}{y''}}{q}(x_i) \right| + o(h^2).$$

Samuti kehtivad $\|S'-y'\|_\infty = O(h^2)$ ja $\|S''-y''\|_\infty = O(h^2)$. Siin on võimalik tulemusi võrrelda kuupsplain-kollokatsioonimeetodiga ([10])

$$\|S-y\|_\infty \leqslant \frac{h^2}{12} \max_{1\leqslant i\leqslant n-1} \left| \frac{y^{IV}}{q}(x_i) \right| + o(h^2).$$

Arvuliste katsete tulemused nii interpolatsiooni- kui rajaülesande jaoks on kooskõlas töös toodud teoreetilistega. On võetud lihtne funktsioon ning näidatud, et selle korral annavad ratsionaalsplainid võrreldes ruut- ja kuupsplainidega paremaid tulemusi.

Kirjandus

[1] L. Fox, *The Numerical Solution of Two-Point Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, London, 1957.

[2] L. Collatz, *The Numerical Treatment of Differential Equations*, Springer, Berlin, 1960.

[3] E. Ideon, P. Oja, *Linear/linear rational spline interpolation*, Math. Model. Anal. **15** (2010), 447–455.

[4] E. Ideon, P. Oja, *Quadratic/linear rational spline interpolation*, Math. Model. Anal. **18** (2013), 250–259.

[5] E. Ideon, *Rational spline collocation for boundary value problems*, Tartu, 2013, doktoritöö.

[6] E. Ideon, P. Oja, *Linear/linear rational spline collocation for linear boundary value problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics **263** (2014), 32–44.

[7] A.K.A. Khalifa, J.C. Eilbeck, *Collocation with quadratic and cubic splines*, IMA J. Numer. Anal. **2** (1982), 111–121.

[8] B.I. Kvasov, *Quadratic spline interpolation*, Akad. Nauk SSSR, Sib. Otdelenie, Inst. Teoret. i Prikl. Mekh., Novosibirsk, preprint nr 3, 1981.

[9] P. Oja, *Low degree rational spline interpolation*, BIT **37** (1998), 901–909.

[10] P. Oja, A. Reitsekas, *Collocation and subdomain methods with quadratic and cubic splines for boundary value problems*, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. **36** (1987), 118–128.

[11] I.J. Schoenberg, *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Quart. Appl. Math. **4** (1946), 45–99, 112–141.

[12] Yu.S. Zavyalov, B.I. Kvasov, V.L. Miroshnicenko, *Methods of Spline-functions*, Nauka, 1980.

Diameeter-2 omadusega Banachi ruumide geomeetriline struktuur

Johann Langemets[1]
Tartu Ülikool

Sissejuhatus

2001. aastal näitasid O. Nygaard ja D. Werner (vt [15]), et mis tahes lõpmatumõõtmelises ühtlases algebras on ühikkera iga mittetühja suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga diameeter kaks. Kui Banachi ruumil on selline omadus, siis öeldakse, et tal on *diameeter-2 omadus*. Diameeter-2 omadusega on näiteks Daugaveti omadusega Banachi ruumid (vt [16]), lõpmatumõõtmelised C^*-algebrad (vt [4]) ja mitterefleksiivsed Banachi ruumid, mis on M-ideaalid oma teises kaasruumis (vt [14]).

Suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga erijuhuks on viil, kusjuures on teada, et ühikkera iga mittetühi suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk sisaldab teatud viilude kumerat kombinatsiooni. Seda asjaolu silmas pidades vaatlevad T. A. Abrahamsen, V. Lima ja O. Nygaard artiklis [2] diameeter-2 omaduse kõrval selle kahte erinevat versiooni – *tugevat diameeter-2 omadust* ja *lokaalset diameeter-2 omadust*. Järgnevas annamegi lühiülevaate väitekirjas [13] käsitletatud diameeter-2 omaduste peamistest uurimissuundadest.

1. Viilud ja diameeter-2 omadused

Olgu edaspidi X mittetriviaalne Banachi ruum üle reaalarvude korpuse. Sümbolitega B_X ja S_X tähistame vastavalt selle ruumi kinnist ühikkera ja ühiksfääri. Ruumi X kaasruumi jaoks kasutame tähist X^*.

[1]Johann Langemets on 2015. a. Arnold Humala preemia laureaat.

Definitsioon. Ühikkera *viiluks* nimetatakse hulka kujul

$$S(x^*, \alpha) = \{x \in B_X : x^*(x) > 1 - \alpha\},$$

kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$.

Paneme tähele, et viil on ühikkera B_X lõige lahtise poolruumiga $\{x \in X : x^*(x) > 1 - \alpha\}$. Seega on viil alati suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk.

Viilude kumera kombinatsiooni all mõeldakse hulka kujul

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S(x_i^*, \alpha_i),$$

kus $n \in \mathbb{N}$ ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ on sellised, et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Erinevalt viilust ei tarvitse viilude kumer kombinatsioon olla alati suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk. Samas on teada, et iga mittetühi ühikkera suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk sisaldab mingit viilude kumerat kombinatsiooni (vt nt [8]).

Norra matemaatikud T. A. Abrahamsen, V. Lima ja O. Nygaard tõid artiklis [2] sisse järgmised diameeter-2 omadused:

Definitsioon. Banachi ruumil X on

- *lokaalne diameeter-2 omadus* (LD2P), kui iga B_X viilu diameeter on 2;
- *diameeter-2 omadus* (D2P), kui iga lõpliku arvu B_X viilude mittetühja ühisosa diameeter on 2;
- *tugev diameeter-2 omadus* (SD2P), kui iga lõpliku arvu B_X viilude kumera kombinatsiooni diameeter on 2.

Eelneva põhjal on selge, et SD2P $\Rightarrow$ D2P ja D2P $\Rightarrow$ LD2P. Osutub, et paljudel klassikalistel Banachi ruumidel on isegi tugev diameeter-2 omadus.

Näide 1.

- Ruumidel $c_0, \ell_\infty, C[0,1]$, $L_1[0,1]$ ja $L_\infty[0,1]$ on tugev diameeter-2 omadus.

- Refleksiivsetel ruumidel (nt ℓ_p, kus $1 < p < \infty$) ei ole isegi lokaalset diameeter-2 omadust, sest neis ruumides leidub kui tahes väikese diameetriga viile. Samal põhjusel ei ole ka ruumil ℓ_1 lokaalset diameeter-2 omadust.

Artiklis [2] püstitati hüpotees, et need kolm diameeter-2 omadust on üldiselt üksteisest erinevad. Hispaania matemaatikud J. Becerra Guerrero, G. López Pérez ja A. Rueda Zoca tõestasid oma artiklis [5], et leidub Banachi ruum, millel on LD2P, aga ei ole D2P. Omaduste D2P ja SD2P erinevus tõestati sõltumatult artiklites [10] ja [3]. Täpsemalt, varasemast oli teada, et D2P omadus kandub liidetavatelt üle ℓ_p-summale iga $1 \leqslant p \leqslant \infty$ korral (vt [2]). Teisalt, kui $1 < p < \infty$, siis Banachi ruumide ℓ_p-summal ei ole kunagi tugevat diameeter-2 omadust:

Teoreem 1 ([10]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $1 < p < \infty$. Siis Banachi ruumil $X \oplus_p Y$ ei ole tugevat diameeter-2 omadust.*

Järeldus 2. *Banachi ruumil $c_0 \oplus_2 c_0$ on diameeter-2 omadus, aga pole tugevat diameeter-2 omadust.*

2. Oktaeedrilised normid

1989. aastal võttis Prantsuse matemaatik G. Godefroy (vt [9]) kasutusele oktaeedrilise normi mõiste, et kirjeldada Banachi ruume, mis sisaldavad isomorfselt ruumi ℓ_1. Selle mõiste kõrval vaatleme ka kaht nõrgemat versiooni.

Definitsioon. Banachi ruum X on

- *lokaalselt oktaeedriline* (LOH), kui iga $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ jaoks leidub $y \in S_X$ nii, et

$$\|x \pm y\| \geqslant 2 - \varepsilon;$$

- *nõrgalt oktaeedriline* (WOH), kui iga $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ja $x^* \in S_{X^*}$ jaoks leidub $y \in S_X$ nii, et iga i ja $t > 0$ korral

$$\|x_i + ty\| \geqslant (1 - \varepsilon)(|x^*(x)| + t);$$

- *oktaeedriline* (OH), kui iga $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ jaoks leidub $y \in S_X$ nii, et iga i korral

$$\|x_i + y\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$

Definitsioonist on selge, et OH $\Rightarrow$ WOH ja WOH $\Rightarrow$ LOH.

Näide 2.

- Ruumid $\ell_1, C[0,1]$, $L_1[0,1]$ ja $L_\infty[0,1]$ on oktaeedrilised.
- Ruumid c_0 ja ℓ_p, kus $1 < p \leqslant \infty$, ei ole lokaalselt oktaeedrilised.

Artiklitest [9] ja [6] saame teada, et Banachi ruumil on tugev diameeter-2 omadus parajasti siis, kui tema kaasruum on oktaeedriline. Varasemast oli teada ka, et lokaalse diameeter-2 omadusega ruumi kaasruum on lokaalselt oktaeedriline (vt nt [7]). Diameeter-2 omadusega ruumide kaasruumide kirjeldus õnnestus meil anda artiklis [11].

Teoreem ([3]). *Banachi ruumil on diameeter-2 omadus parajasti siis, kui tema kaasruum on nõrgalt oktaeedriline.*

3. Ruudu omadused

D. KUBIAK (vt [12]) märkas esimesena, et kui Banachi ruumil on mingi ruudu omadus, siis on sellel ruumil ka vastav diameeter-2 omadus. Ruudu omaduste terminoloogia sai sisse toodud ja uuritud artiklis [1].

Definitsioon. Banachi ruum X on

- *lokaalse ruudu omadusega* (LASQ), kui iga $x \in S_X$ jaoks leidub jada $(y_k) \subset S_X$ nii, et

$$\|x \pm y_k\| \to 1 \quad (k \longrightarrow \infty);$$

- *nõrga ruudu omadusega* (WASQ), kui iga $x \in S_X$ jaoks leidub jada $(y_k) \subset S_X$ nii, et

$$\|x \pm y_k\| \to 1 \quad \text{ja} \quad y_k \xrightarrow{w} 0 \quad (k \longrightarrow \infty);$$

- *ruudu omadusega* (ASQ), kui iga $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ jaoks leidub jada $(y_k) \subset S_X$ nii, et iga i korral

$$\|x_i + y_k\| \longrightarrow 1 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

Definitsioonist on selge, et WASQ $\Rightarrow$ LASQ. Osutub, et kehtib ka implikatsioon ASQ $\Rightarrow$ WASQ, kuid see pole nii ilmne:

Teoreem 5. *Kui Banachi ruum on ruudu omadusega, siis ta on ka nõrga ruudu omadusega.*

Näide 3.

- Ruum c_0 on ruudu omadusega.
- Ruum $L_1[0,1]$ on nõrga ruudu omadusega, kuid ei ole ruudu omadusega.
- Ruumid $C[0,1]$, $L_\infty[0,1]$ ja ℓ_p, kus $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ei ole lokaalse ruudu omadusega.

Artikli [1] üks põhitulemustest kirjeldab ära terve klassi ruume, mis on ruudu omadusega:

Teoreem 6. *Mitterefleksiivsed Banachi ruumid, mis on M-ideaalid oma teises kaasruumis, on ruudu omadusega.*

Siinkohal tahaksime ära mainida ka artiklis [1] püstitatud kaks lahtist küsimust, millele pole tänaseni veel vastuseid teada:

Küsimus 1. Kas on olemas Banachi ruum, mis on LASQ, aga ei ole WASQ?

Küsimus 2. Kas on olemas kaasruum, mis on ASQ?

Ülevaade tulemustest

Eelnevalt defineeritud geomeetriliste omaduste omavaheline vahekord on kujutatud järgmisel skeemil:

$$
\begin{array}{ccccc}
X \text{ on } ASQ & \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & WASQ & \underset{\overset{\Leftarrow}{?}}{\Rightarrow} & LASQ \\
\not\Uparrow\Downarrow & & \not\Uparrow\Downarrow & & \not\Uparrow\Downarrow \\
X \text{ on } SD2P & \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & D2P & \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & LD2P \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
X^* \text{ on } OH & \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & WOH & \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & LOH
\end{array}
$$

Järgmisesse tabelisse on koondatud eelmainitud omaduste olulisemad stabiilsustulemused.

Stabiilsus ℓ_p-summadel

$X \oplus_p Y$	X, Y	p	Viited
LD2P	X ja Y LD2P	$1 \leqslant p < \infty$	[2], [3]
	X või Y LD2P	$p = \infty$	
D2P	X ja Y D2P	$1 \leqslant p < \infty$	[2], [3]
	X või Y D2P	$p = \infty$	
SD2P	X ja Y SD2P	$p = 1$	[2], [3]
	X või Y SD2P	$p = \infty$	
LASQ	X ja Y LASQ	$1 \leqslant p < \infty$	[1]
	X või Y LASQ	$p = \infty$	
WASQ	X ja Y WASQ	$1 \leqslant p < \infty$	[1]
	X või Y WASQ	$p = \infty$	
ASQ	X või Y ASQ	$p = \infty$	[1]
LOH	X või Y LOH	$p = 1$	[11]
	X ja Y LOH	$1 < p \leqslant \infty$	
WOH	X või Y WOH	$p = 1$	[11]
	X ja Y WOH	$1 < p \leqslant \infty$	
OH	X või Y OH	$p = 1$	[11]
	X ja Y OH	$p = \infty$	

Ülalolevast tabelist loeme näiteks, et $X \oplus_p Y$ on omadusega LD2P niipea kui ruumidel X ja Y on LD2P ja p on selline, et $1 \leqslant p < \infty$.

Lõpetuseks soovib autor mainida Eesti Haridus- ja Teadusministeeriumi institutsionaalset uurimistoetust IUT20-57.

Kirjandus

[1] T. Abrahamsen, J. Langemets, V. Lima, *Almost square Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **434** (2016), 1549–1565.

[2] T. Abrahamsen, V. Lima, O. Nygaard, *Remarks on diameter 2 properties*, J. Conv. Anal. **20** (2013), 439–452.

[3] M. D. Acosta, J. Becerra Guerrero, G. López Pérez, *Stability results of diameter two properties*, J. Conv. Anal. **22** (2015), 1–17.

[4] J. Becerra Guerrero, G. López Pérez, A. Rodríguez Palacios, *Relatively weakly open sets in closed balls of C^*-algebras*, J. London Math. Soc. **68** (2003), 753–761.

[5] J. Becerra Guerrero, G. López Pérez, A. Rueda Zoca, *Big slices versus big relatively weakly open subsets in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **428** (2015), 855–865.

[6] R. Deville, *A dual characterisation of the existence of small combinations of slices*, Bull. Austral. Math. Soc. **37** (1988), 113–120.

[7] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 64, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.

[8] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey, W. Schachermayer, *Some topological and geometrical structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **378**, 1987.

[9] G. Godefroy, *Metric characterization of first Baire class linear forms and octahedral norms*, Studia Math. **95** (1989), 1–15.

[10] R. Haller, J. Langemets, *Two remarks on diameter 2 properties*, Proc. Est. Acad. Sci **63** (2014), 2–7.

[11] R. Haller, J. Langemets, M. Põldvere, *On duality of diameter 2 properties*, J. Conv. Anal. **22** (2015), 465–483.

[12] D. Kubiak, *Some geometric properties of Cesàro function space*, J. Conv. Anal. **21** (2014), 189–201.

[13] J. Langemets, *Geometrical structure in diameter 2 Banach spaces*, Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis 99 (2015), `http://dspace.ut.ee/handle/10062/47446`.

[14] G. López Pérez, *The big slice phenomena in M-embedded and L-embedded spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2005), 273–282.

[15] O. Nygaard, D. Werner, *Slices in the unit ball of a uniform algebra*, Arch. Math. **76** (2001), 441–444.

[16] R. V. Shvydkoy, *Geometric aspects of the Daugavet property*, J. Funct. Anal. **176** (2000), 198–212.

MATEMAATIKUD

Gennadi Vainikko

Rahvusvaheliselt kõige tuntum Eesti matemaatik akadeemik GENNADI VAINIKKO tähistas 31. mail 2013 oma 75. sünnipäeva.

G. Vainikko on ingeri-soomlane, ta sündis Karjalas Kondopoga (Kontupohja) linnas. Saksa okupatsioonivõimud deporteerisid ta vanemate perekonna 1942. a. sõjapiirkonnast Eestisse, hiljem Soome. Soome–NSVL rahulepingu alusel tuli perel 1945. a. naasta Nõukogude Liitu, esialgu Venemaale Kalinini oblastisse. 1946. a. õnnestus perel Eestisse kolida, kuid püsiv elamisluba õnnestus saada alles 1954. Venemaale väljasaatmise vältimiseks tuli sageli vahetada elu- ja töökohta, lastele tähendas see sagedast koolivahetamist. G. Vainikko on õppinud nii Mäetagusel, Vändras, Tõrvas, Kosel kui ka Kehras, 1956. a. lõpetas ta kuldmedaliga Kehra Keskkooli. G. Vainikko huvide kujundamisel oli otsustav roll isa Mikkol, kes on ise eksternina lõpetanud Leningradi Pedagoogilise Instituudi füüsika-matemaatika õpetaja kutsega, kuid elu keerdkäikude tõttu töötanud suurema osa ajast muudel aladel.

G. Vainikko astus 1956. aastal Tartu Ülikooli matemaatika-loodusteaduskonda ja õppis viitele, kuid raamatukogus Toomel luges regulaarselt hoopis nobelistide romaane, mida koju ei laenutatud. Alles dotsent ENN TAMMELT diplomitöö teema saanuna adus ta, et matemaatika on talle ääretult huvitav ja ülipõnev ning edaspidi töötas ta täieliku andumusega. Pärast ülikooli *cum laude* lõpetamist jätkas G. Vainikko 1961–1964 õpinguid ja uuringuid Enn Tamme juhendamisel matemaatilise analüüsi kateedri aspirandina ja kaitses 1964. a. Tartu Ülikooli aulas füüsika-matemaatikateaduste kandidaadikraadi arvutusmatemaatika teemal "Galjorkini tüüpi meetodite täpsusest". Aastatel 1963–1965 töötas ta TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri assistendi ja vanemõpetajana.

1965. a. kutsus Voroneži Ülikooli professor Mark Krasnoselskii (paljude fundamentaalsete monograafiate autor ja talendikate matemaatikute õpetaja, 33 tema juhendatavat kaitses NSVL-i doktorikraadi) G. Vainikko tööle Voroneži, prominentsesse matemaatikakeskusse. G. Vainikko töötas seal 1965–1967 dotsendina, tehes õppetööd, juhendades aspirante ja osaledes paljudes seminarides. Ta kogus tohutul hulgal "matemaatilist folkloori", veel kirjutamata kujul matemaatilisi teadmisi. 1967. a. pöördus G. Vainikko tagasi Tartusse ja töötas dotsendina matemaatilise analüüsi kateedris 1967–1969, arvutusmatemaatika kateedris 1969–1970. Ta jätkas Voronežis alustatud tööd lähendusmeetodite üldise teooria loomiseks. Erakordselt intensiivse ja tulemusrikka töö tulemusena valmis vaid nelja aastaga Nõukogude Liidu süsteemi kõrgeimat teaduste doktori teaduskraadi väärinud töö. Juba 30-aastasena kaitses G. Vainikko 1969. a. Voroneži Ülikoolis doktoritööd "Lineaarsete ja mittelineaarsete operaatorite lähendamisest ja operaatorvõrrandite ligikaudsest lahendamisest". Tavaliselt kulutati selle NSVL-i doktorikraadini jõudmiseks paarkümmend aastat ja töö mahtu võrreldi ligikaudu viie kandidaaditööga (ehk PhD tööga). 1969. a. koos Voroneži kolleegidega avaldatud venekeelne monograafia "Operaatorvõrrandite ligikaudne lahendamine" ilmus paari aasta pärast ka inglise ja saksa keeles ning garanteeris kohe rahvusvahelise tunnustuse.

Aastail 1971–1992 töötas G. Vainikko Tartu Ülikoolis professori ja arvutusmatemaatika kateedri juhatajana, 1992–1994 aga professorina, vastloodud rakendusmatemaatika instituudi diferentsiaal- ja integraalvõrrandite õppetooli juhatajana. 1995. a. võitis ta paljude tugevate konkurentide ees Helsingi Tehnikaülikooli professori valimiskonkursi ja töötas seal kuni 2003. aastani. Pöördudes tagasi Eestisse, töötas G Vainikko 2003–2004 Tallinna Pedagoogikaülikooli matemaatika osakonna vanemteadurina, alates 2005. aastast aga Tartu Ülikoolis vanemteadurina. Alates 2005. aastast on ta ka Tartu Ülikooli emeriitprofessor.

G. Vainikko valiti 1986. a. Eesti Teaduste Akadeemia akadeemikuks matemaatika erialal. Keerulistel ülemineku ja teadusreformi aastatel 1990–1994 oli ta Teaduste Akadeemia asepresidendi ametis. 1991–1994 oli ta ka Eesti Matemaatika Seltsi asepresident, alates 2006. aastast on ta Eesti Matemaatika Seltsi auliige.

Gennadi Vainikko teadustöö põhivaldkonnaks on rakenduslik numbriline funktsionaalanalüüs. Ta on uurinud rakendustes olulisi ülesannete klasse puhta matemaatika, eelkõige funktsionaalanalüüsi vahenditega, aga ka nende ülesannete lahendamist sobivate arvutusmeetoditega. Uurimistöö põhisuundadeks on lähendusmeetodite üldine teooria, kiired lahendusalgoritmid, projektsioonimeetodid, mittekorrektsed ülesanded, pöördülesanded, integraal- ja pseudodiferentsiaalvõrrandite kvalitatiivne teooria, numbrilised meetodid ja matemaatilise füüsika ülesanded.

G. Vainikko teadusuuringute algusetapiks oli diskretiseerimismeetodite üldise teooria väljatöötamine operaator-, integraal- ja diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks, täpsemalt ühise funktsionaalanalüütilise baasi ehitamine lähendusmeetodite koonduvuse ja koonduvuskiiruse uurimiseks. Algul õnnestus G. Vainikkol lihtsustada, üldistada ja laiendada mittelineaarsetele operaatorvõrranditele ning lineaarsete võrrandite omaväärtusülesandele L. Kantorovitši lähendusmeetodite teooriat, jõudes häiritustega Galjorkini meetodi kontseptsioonini. Järgnevad üldistused viisid operaatorite kompaktse ja regulaarse koonduvuse kontseptsiooni väljatöötamiseni, seda nn abstraktse diskretiseerimise raamistikus, mis võimaldab loomulikul viisil siduda pidevat lähteülesannet ja selle diskretisatsioone.

Lähendusmeetodite üldise teooria loomise järel on G. Vainikko põhjalikult uurinud rakendustest inspireeritud ülesannete klasse.

Aastail 1970–85 töötas ta kohakaasluse alusel ka Tõraveres TA Füüsika- ja Atmosfäärifüüsika Instituudis ja kirjutas mitmed teadustööd kahasse füüsik Olev Avastega. G. Vainikko tuletas kiirguslevi probleemide uurimiseks rebitud pilvisuse tingimustes teatava nõrgalt singulaarse integraalvõrrandi. Ta analüüsis taoliste võrrandite lahendite siledust ja kirjeldas lahendi tuletiste iseärasusi integreerimislõigu otspunktides. See pani aluse nõrgalt singulaarsete integraalvõrrandite üldisele teooriale ja nende lahendamiseks optimaalset järku lahendusmeetodite konstrueerimisele.

Ajendatuna koostööst Tõraveres füüsikutega kiirgusülekande pöördülesannetes alustas G. Vainikko 1979. a. mittekorrektsete ülesannete uuringuid. Sputnikul tehtud mõõtmistulemuste interpreteerimine taandus mõningate esimest liiki integraalvõrrandite lahendamisele, viimased on klassikaliseks näiteks mittekorrektsetest ülesannetest. Mittekorrektsus tähendab eelkõige ülesande lahendi ebastabiilsust häirituste suhtes lähteandmetes, häirituste mõju vähendamiseks lahendatakse taolisi ülesandeid nn. regulariseerimismeetodite abil. Paljude regulariseerimismeetodite koonduvuse ja koonduvuskiiruse uurimine õnnestus taandada operaatorite teooriale ning saada olulised tulemused meetodite optimaalsusest ja järgu järgi optimaalsusest. G. Vainikko ja A. Veretennikovi 1986. a. monograafia "Iteratsiooniprotseduurid mittekorrektsetes ülesannetes" on Eesti matemaatikute kõige tsiteeritum publikatsioon, kuigi see ilmus vene keeles ja reeglina on ingliskeelsed allikad muukeelsetest oluliselt rohkem tsiteeritavad.

Mitmed kahemõõtmeliste rajaülesannetega ekvivalentsed esimest või teist liiki integraalvõrrandid piirkonna rajajoonel on käsitletavad perioodiliste pseudodiferentsiaalvõrranditena. Perioodiline pseudodiferentsiaaloperaator esitab loomulikel eeldustel isomorfismi perioodiliste Sobolevi ruumide paari vahel. G. Vainikko on pseudodiferentsiaalvõrrandeid uurinud alates 1993. aastast. Tal õnnestus 1996. ja 2002. a. monograafiates esitada nende võrrandite üldine teooria, samuti konstrueerida nende lahendamiseks erinevaid diskretiseerimismeetodeid, mis on nii optimaalset järku kui efektiivsed arvutustes.

Erijuhtudeks perioodilistest pseudodiferentsiaalvõrranditest on Cauchy singulaarne integraalvõrrand ja hüpersingulaarne integraalvõrrand. Viimased pakuvad eriti suurt teoreetilist ja rakenduslikku huvi mitteperioodilisel juhul. Koostöös Moskva matemaatiku IVAN LIFANOVIGA ilmusid G. Vainikkol 2001 ja 2004 monograafiad hüpersingulaarsete integraalvõrrandite teooriast ja nende lahendusmeetoditest.

G. Vainikko on uurinud ka funktsioonide lähendamist maksimaalselt siledate splainidega ning saanud mitteparandatavad veahinnangud funktsiooniklasside interpoleerimisele ja kvaasi-interpoleerimisele splainidega ühtlasel võrgul reaalteljel ning lõigul.

G. Vainikko on seadnud eesmärgiks leida integraalvõrrandite kiired lahendusalgoritmid, seades range nõude, et lähislahend oleks mitte ainult optimaalse koonduvusjärguga, vaid ka piirodav arvutustes: aritmeetiliste tehete arv peab olema võrdeline lähislahendi parameetrite arvuga. Ta on konstrueerinud mitmeid kiireid meetodeid sileda tuumaga integraalvõrrandite jaoks ja perioodilise nõrgalt singulaarse integraalvõrrandi korral.

G. Vainikko pani aluse uue olulise Volterra integraaloperaatorite klassi, südamlike operaatorite uurimisele. Erinevalt klassikalisest Volterra integraaloperaatorist pole südamlik Volterra integraaloperaator reeglina kompaktne. G. Vainikkol õnnestus anda sellise operaatori spektri täielik kirjeldus, mis võimaldas formuleerida tulemused vastavate esimest ja teist liiki lineaarsete ja mittelineaarsete integraalvõrrandite lahenduvuse ja ühese lahenduvuse kohta ning konstrueerida efektiivseid meetodeid nende võrrandite ligikaudseks lahendamiseks.

Viimastel aastatel on akadeemik Vainikko intensiivselt uurinud funktsioonide murrulist diferentseeruvust. Murrulise tuletise üle arutlesid juba G.W. LEIBNIZ ja L. EULER, aga olulisemad tulemused on saadud viimasel poolsajandil. Tänu uutele rakendustele füüsikas, bioloogias, keemias ja teistes valdkondades on leitud, et mittetäisarvulist järku tuletiste kasutamine tavaliste tuletiste asemel võimaldab sageli paremini modelleerida mitmesuguseid protsesse, muuhulgas mäluga materjalide käitumist. Seetõttu on viimase paarikümne aasta jooksul huvi murrulist järku tuletiste vastu hüppeliselt kasvanud. Ometi oli viimase ajani selguseta fundamentaalne küsimus, millised funktsioonid on murruliselt diferentseeruvad. See küsimus leidis ammendava vastuse alles G. Vainikko 2016. a. artiklis.

Paljud G. Vainikko tulemused on lõplikud selles mõttes, et need on oma olemuses mitteparandatavad.

Professor G. Vainikko teadustulemused on avaldatud 12 monograafias ja enam kui 240 teadusartiklis, ta on juhendanud üle 30 doktori- ja kandidaaditöö. Ta on esinenud ettekannetega väga paljudel teaduskonverentsidel üle maailma. Enamus G. Vainikko monograafiatest on välja kasvanud erikursuste tekstidest, mida ta on lugenud Tartu Ülikoolis, osaliselt ka Saksamaa, Venemaa, Soome, USA, Lõuna-Korea ja mõningate teiste maade ülikoolides. Seisuga 07.06.2017 kajastas matemaatikapublikatsioonide andmebaas MathReviews G. Vainikkolt 177 publikatsiooni tsiteeringute arvuga 1348 ja tsiteerivate autorite arvuga 913 (teistel Eesti matemaatikutel jääb tsiteerivate autorite arv alla 200), andmebaas ISI Web of Science kajastab aga 74 G. Vainikko artiklit, mida on selles andmebaasis tsiteeritud 757 korda (andmebaasis Scopus on vastavad arvud 91 ja 887).

G. Vainikko on olnud aastakümnete vältel mitmete rahvusvaheliste ajakirjade toimetuskolleegiumides: Numerical Functional Analysis and Optimization (USA), Mathematical Modelling and Analysis (Vilnius), Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen (Saksamaa), Computational Methods in Applied Mathematics (Berliin, Minsk), Eesti TA Toimetised. Füüsika. Matemaatika (Tallinn); kahe esimese ajakirja toimetuskolleegiumi kuulub ta praegugi. Nimetatud ajakirjadest esimene ja neljas ilmutasid G. Vainikkole pühendatud erinumbrid vastavalt 2009. a. (nr. 9–10) ja 2008. a. (nr. 3).

G. Vainikko on lugenud paljusid matemaatika kursusi ja kirjutanud õpikuid ("Harilikud diferentsiaalvõrrandid", 1972, 1986, 2011; "Matemaatilise füüsika võrrandid", 1973, 1974 jne.). Erikursustes on ta püüdnud viia üliõpilasteni ja teha neile arusaadavaks teaduse uusimaid saavutusi, koostatud on ulatuslikud elektroonilised loengukonspektid integraalvõrrandite kiirlahendajatest ja nõrgalt singulaarsetest integraalvõrranditest. Käesoleval 2017. aastal juhatas G. Vainikko Volterra ja Fredholmi võrrandite seminari (osalised olid õppejõud ja doktorandid) ja integraalvõrrandite kiire lahendamise seminari (doktorantidele) ning ta juhendab kaht doktoranti.

Gennadi Vainikkole omistati 1989. aastal Eesti NSV teenelise teadlase aunimetus. Teda on autasustatud 1998. a. Valgetähe III klassi teenetemärgiga ja Eesti Teaduste Akadeemia medaliga. Aastal 2011 sai tema uuringute tsükkel "Südamlikud Volterra integraalvõrrandid" riigi teaduspreemia täppisteaduste valdkonnas. 2017. aastal sai G. Vainikko Eesti Vabariigi teaduspreemia elutöö eest.

2017. a. elutöö preemiatele pühendas 17. veebruari ajaleht Sirp mitu lehekülge. Toome seal ilmunud G. Vainikko kirjutise "Ühe matemaatiku kujunemislugu" alguslõigud matemaatikast ja matemaatikust.

"Arvamus, et matemaatika on õpetus arvudest ja geomeetrilistest kujunditest, on lootusetult lihtsustatud ja iganenud. Matemaatika selle nüüdisaegses tähenduses on eelkõige matemaatiliste (mõtteliste) mudelite analüüs. Matemaatiline mudel – see on abstraktne hulk, mille elementide vahel on kirjeldatud rida seoseid; mudelit uuritakse loogikareeglite alusel. Puhta matemaatika korral on tegemist matemaatika enda mudelitega, rakendusmatemaatika korral on uuritavad mudelid pärit teistest teadustest või muust inimtegevusest laiemas mõttes. Siiski matemaatika jaotus puhtaks matemaatikaks ja rakendusmatemaatikaks on suhteline, näiteks integraal- ja diferentsiaalvõrrandeid kasutatakse laialdaselt füüsikas, bioloogias ja paljudes muudes teadustes, samas on diferentsiaalvõrrandite teooria välja arendatud üheks puhta matemaatika haruks. Pean ka ennast puhtaks matemaatikuks, kui uurin arvutusmeetodite fundamentaalseid omadusi (koonduvust, koondumiskiirust jm) integraal- ja diferentsiaalvõrrandite numbrilisel lahendamisel.

Matemaatik esitab oma arutlused rangete loogiliste järelduste ahelana. Ometi tugineb ta uute tulemuste avastamisel eelkõige oma intuitsioonile ja fantaasiale. Edukat matemaatikut iseloomustabki eelkõige arenenud intuitsioon ja fantaasia. Professionaalsed teadmised ja oskused on muidugi ka olulised, kuid need on siiski alles teisel kohal; muide, just seepärast on noored matemaatikas ikka edukad olnud. Tabanud loendumatute variantide hulgast võimaliku lahenduse intuitsioonile, fantaasiale ja eelnevatele kogemustele tuginedes, on see lahendus vaja ära põhjendada oma teadmisi kasutades. Olukord on võrreldav malekäigu sooritamisega: kogemused ja intuitsioon võimaldavad enamiku käiguvalikutest kohe kõrvale jätta, fantaasia võimaldab vastast üllatada ootamatu käiguga, üksikasjaline variantide analüüs aga teeb lõppotsuse ühe või teise käigu kasuks."

G. Vainikko on olnud kolleegidele alati väga hea, tagasihoidlik ja abivalmis kaaslane. Gennadi hobid on sport (ta on läbinud Tartu suusamaratoni vähemalt 15 korral, tunneb suusatamisest ja tervisejooksust mõnu viimastelgi aastatel) ning muusika (ligi 25 aastat on ta laulnud meeskooris Gaudeamus, külastab nüüdki sageli kontserte ning teatrietendusi). Kolleegid soovivad Gennadile jätkuvaid elamusi nii matemaatilistes avastustes kui muudes valdkondades.

Autor soovib mainida Eesti Haridus- ja Teadusministeeriumi institutsionaalset uurimistoetust IUT20-57.

Uno Hämarik
Tartu Ülikool

Tamara Sõrmus

Tallinna Ülikooli emeriitdotsent TAMARA SÕRMUS (neiuna Sander, sünd. 29.11.1926) on töötanud matemaatikaõppejõuna üle 40 aasta Tartu Ülikoolis ja Tallinna Ülikoolis. Tema erialane tegevus algas siiski mitte akadeemilisel põllul, vaid Vanemuises balletisolistina. Tantsija elu kestis 7 aastat, mille katkestas seljavigastus. Tamara vend, hilisem tuntud teatrikunstnik Georg Sander (1923–2016), õppis Tartu Kommertsgümnaasiumis ja venna õpingute kõrvalt tekkis huvi matemaatika vastu.

Oma õppejõust kirjutab dotsent Sõrmuse õpilane ja matemaatika eriala tudeng Tallinna Pedagoogikaülikoolis aastatel 1991–1996 SIIM KALLAST, kes töötab Lääne–Tallinna Keskhaiglas.

Meie kursus alustas 1991. aasta kevadel matemaatika eriala õpinguid endise nimega Tallinna Pedagoogilises Instituudis ja me olime üks viimaseid kursusi, kellele matemaatilise analüüsi aineid õpetas Tamara Sõrmus. Vaatasin matriklist järele, et kokku andis ta meile loenguid ja praktikume kuuel järjestikusel semestril alates õpingute algusest kuni kolmanda kursuse lõpuni välja. Matemaatilise analüüsi programm oli sel ajal küllaltki intensiivne ja kokkupuude õppejõuga oli vägagi tihe.

Milline oli Tamara Sõrmus õppejõuna? Kahtlemata väga nõudlik, hästi konkreetne, punktuaalselt täpne ja erakordselt põhjalikult oma eriala valdav õppejõud. Tema loengud olid väga süsteemsed, kindla struktuuriga ja iga detail täpselt paigas (näiteks teemade järgnevus, numeratsioon jne). Alati alustas ta loengut sissejuhatusega eelmisest korrast ja lõpetas lühikese kokkuvõttega. Ta hindas kõrgelt konspekteerimise tähtsust ja oli seetõttu oma sõnastuses hästi konkreetne ja täpne. Ka aastaid hiljem vaadates mõnda konspekti (mul on jäänud mõni mälestuseks alles) on need siiani väga hästi loetavad. Eksamil või seminaril vastates ei olnud lubatud ka kõige väiksemad ebatäpsused. Teinekord võis Tamarat keeleliselt mittekorrektne sõnastus vägagi pahandada. Mäletan ühte juhtumit, kui minu grupivend läks näitama oma kursusetööd, olles eelmistel päevadel põhjalikult sellega tegelenud ja vaikimisi lootes juhendajalt positiivset tagasisidet. Paraku juhtus hoopis vastupidi, Tamara kurjustas, kuna leidis sealt mõned mittekorrektsused ja keelelised puudused, mis meile tundusid tol ajal pigem marginaalsed.

Tamara oli meile algusest lõpuni väga suur autoriteet ja keegi ei tahtnud saada negatiivse tagasiside osaliseks, samas positiivne tunnustus jäi kauaks meelde ja mõjus tõeliselt innustavalt. Tamara Sõrmuse ainetes lõppesid kõik semestrid eksamitega. Kokku oli meil kuus eksamit, kõik suulised ning traditsioonilises vormis eksamipiletitega. Kahtlemata olid need ülikooliaja kõige raskemad, kuna materjali oli hästi palju ja sisu keeruline. Tamara sai väga kiiresti aru, kas tudeng valdas teemat või ei. Raskemate kohtade päheõppimine ei olnud eriti efektiivne, sest sellega Tamarat ära petta ei õnnestunud. Tamaral oli kombeks oma küsimustega minna väga põhjalikuks. Isegi siis, kui alguses tundus, et teema on justkui arusaadav ja oskad, siis vastamisel tekkis tihtilugu vastupidine arusaam. Samas läbipõrujaid ei olnud palju, kuna keegi ei riskinud nõrga ettevalmistusega eksamile minna. Minu tulemused olid üldiselt väga head, aga mäletan ühe eksami lõpus Tamara hinnangut, et seekord saad tulemuseks “hea”, kuna oled võimeline enamaks. Peab tunnistama, et selline tagasiside motiveeris järgmiseks korraks veelgi rohkem pingutama.

Mäletan, et teisel semestril tegi Tamara mulle ettepaneku osaleda tudengite teadustööde konkursil, selgitades, et iga kord on vähemalt üks esmakursuslane tema juhendamisel sellisel konkursil osalenud. Et tulemus saaks väga hea, siis valmistasime seda ette hästi põhjalikult. Minu jaoks oli see elu esimene teadustöö üldse. Käisin mitu korda õppejõu juures kodus Väike–Õismäel ja ühe korra külastasime koos ka Teaduste Akadeemia Raamatukogu. Tagantjärgi meenutades oli see tore periood.

Tamara huvialad ei piirdunud kaugeltki üksnes matemaatikaga. Vahetevahel muljetas ta mõnd kogetud kultuurielamust – oli ta ju ise sõjajärgsetel aastatel Vanemuise teatri baleriin ja seega tegelenud kunstiga professionaalsel tasemel. Sageli armastas ta meenutada oma endiseid kolleege, õppejõude ja üliõpilasi. Eriti suure tänutundega rääkis ta oma kunagisest õppejõust ja väitekirja juhendajast, Tartu Ülikooli legendaarsest matemaatikaprofessorist Gunnar Kangrost (1913–1975).

Tamara Sõrmus tähistas 2016. aastal oma suurt juubelit, täitus 90-s eluaasta. Olgugi et me pole viimastel aastatel kohtunud, olen jäänud tema suureks fänniks tänini – mu endine õppejõud on suur isiksus, keda on ikka ja jälle hea meenutada. Ühtlasi soovin nii enda kui ka kogu meie kursuse poolt juubilarile palju õnne ja tugevat tervist ning toimekat ja rõõmsat meelt.

Hele Kiisel

Hele Kiisel on paljude autasudega pärjatud matemaatikaõpetaja. 2015. aastal sai ta Vabariigi Presidendi hariduspreemia. Teda kiidavad nii tema õpilased, nende vanemad kui ka kolleegid ja sõbrad koolimatemaatika ühendusest. Ent mida Hele Kiisel kõigest selles ise arvab? Seda saab lugeda alljärgnevatest küsimustest ja vastustest. Küsijaks on Anne Aasamets.

Sinu kõige värskem autasu on presidendi hariduspreemia. Mis emotsioone see tekitas?

Tulin just Kurgjärvelt oma kooli matemaatikalaagrist, kui sain Piret Arukaevu e-kirjast teada, et olen saanud hariduspreemia. See võttis esialgu tummaks. Laupäeval poja perega oma sünnipäeva pidades avaldasin ka neile uudise. Mind rõõmustas, et õpetajatki märgatakse. Aga võtsin seda ka kui oma töö ilusat kokkuvõtet.

2012. aastal said Valgetähe V klassi teenetemärgi. Kas oled autasudega juba ära harjunud?

Olen saanud vist kõik võimalikud tunnustused. Olen olnud aasta õpetaja, aasta tegija, mulle on antud vilistlaskogu õpetaja elutööpreemia, Tartu linna õpetaja aastapreemia. Lisaks aukirjad olümpiaadidel võitnud õpilaste juhendamise eest. Suur tunnustus mulle kui matemaatikule oli Gerhard Rägo medal 1994. aastal. Sain selle suhteliselt noorena koos oma dekaani Erich Jõgiga, kes minu jaoks oli ja on tõeline autoriteet. Praegu julgen ka ise tunnistada, et olen oma tööd hingega teinud. Tore, kui seda on märgatud.

Kas õpetajat märgatakse piisavalt?

Veel mitte. Minister Ligi on öelnud, et oleme oma haridusega superliigas, kuid see kõrge tase ei kajastu õpetaja palgas. Palgatõusuga on aga kiire! Haridussilmast näeme, et matemaatikaõpetajatest on rohkem kui pooled vanuses 50+. On vaja uut vahetust, kuid praeguse palgaga noori õpetajaks ei meelita.

Peame ka ise probleeme julgelt tõstatama, sest haridusministeeriumis pole ühtegi ainespetsialisti, kes meie eest seisaks.

Kus sa õppisid ja mis sind matemaatika juurde tõi?

Õppisin Misso keskkoolis. Elasin 200 meetri kaugusel koolimajast ega saanud kunagi öelda, et mul jäi vihik koju, sest kohe oleks selle järele saadetud. Olin korralik koolilaps ja tegin kõik õigeks ajaks ära. Viiendas klassis tahtsin saada matemaatikaõpetajaks, kuuendas apteekriks, üheksandas dirigendiks. Lõpuks sai must ikkagi matemaatikaõpetaja. Põhikooliaegne pinginaaber oli õnnelik, et jäin keskkooli edasi ja tema ei pidanud uut pinginaabrit otsima.

Sa oled siis väikesest klassikollektiivist pärit?

Alustas meid 27, aga keskkooli lõpetas 18. Meil olid väga head õpetajad. Nad olid kõigepealt inimesed ja alles seejärel õpetajad. See oli Misso kooli fenomen ja sealt tuli päris palju õpetajaid. Mingil hetkel tehti meil vilistlaste seas analüüs ja selle tulemus oli, et 18% lõpetanutest oli läinud edasi õpetajaks. Eriline oli see, et abituuriumis andis meile tunde ainult kolm naisõpetajat, ülejäänud olid kõik mehed.

Mis sind praegu matemaatika juures hoiab?

Matemaatika on mulle võluv mäng. Et seda võlu mõista, tuleb hakata väga lihtsaid asju õiges järjekorras ritta panema, mitte lihtsalt valemeid pähe õppida, teadmata, mida nendega peale hakata.

Kas sul ei ole olnud mõtet koolist loobuda ja n-ö elama hakata?

Kuna mul on esimene pension käes, siis võin mängida küll mõttega, et kui koolis midagi väga vastu hakkab, jään koju ja hakkan heaks vanaemaks. Aga praegu ma matemaatikat jätta ei kavatse.

Sa annad matemaatikatunde ka väljaspool kooli.

Olen juba pikki aastaid Tallinna Tehnikaülikooli eelõppeosakonnas riigieksamiks ettevalmistavaid kursusi läbi viinud. Aga koduõppe asjus peab mulle ikka väga naha vahele suutma pugeda, et jutule võtaksin. Koolis on tunde palju ja koolimatemaatika ühenduse töö võtab väga palju aega. Tahan ka retsenseerida ja uusi ülesandeid koostada ning koolitusmaterjale kokku panna. Tahaksin teatris käia ja vanaema olla ning ema juurde jõuda.

Lastevanemad räägivad ikka, et nemad matemaatikat ei osanud ja nende lapsed samuti mitte.

See ei pruugi olla päritav. Enamasti on asi pigem viitsimises palju tööd teha. Ilma tööta ei saa matemaatikast õiget mõnu kätte. Küsimus on selles, kas suudan järjepidevalt tööd teha. Ma ei saa ju keeletundi ka minna, kui pole sõnu ära õppinud. Üldiselt ongi nii, et kes saab suvetöö matemaatikas, saab selle ka võõrkeeles.

Aga ma olen hirmus kuri meie poliitikute ja äriinimeste peale, kes kelgivad ajakirjanduses, et nemad matemaatikat ei osanud, aga vaadake, mis tublid inimesed nendest on saanud. Nad võiksid ikka tunnistada, et nende kõrval on tubli raamatupidaja või finantsist, kes matemaatikaoskust nõudva töö nende eest ära teeb. Ei tohi jätta muljet, et matemaatikat ei olegi vaja õppida!

Selliseid ärimehi on pankrotti ka läinud, ja mitte vähe.

On küll. Mõnikord julgen teha hundinalja, et SMS-laen selleks ongi välja mõeldud, et kontrollida, kas inimesel mõistust on või mitte.

Kas sul on matemaatikas ka oma lemmikteemad?

Mu lemmikud on planimeetria ja stereomeetria, kuid olen kõike nii pikalt õpetanud, et ülejäänud teemad on samuti omaseks saanud.

Kas õpilased on viimasel ajal palju muutunud?

Neil on tähelepanu ja püsivusega varasemast rohkem probleeme. Vahel mõni ütleb, et ta ju vaatab ja kuulab, kuid matemaatikas lihtsalt vaadates ja kuulates tulemust ei tule. Sama probleemi olen märganud täiskasvanutega näiteks koolitustel ka kuulatakse ja vaadatakse, kuid samal ajal on sülearvutis Facebook ja Gmail lahti.

Juhan Aru intervjueeris ükskord Sirbis oma järeldoktorantuuri juhendajat Wendelin Wernerit. Kui Juhan küsis juhendajalt, kelle tütar on laulja, mis ühist on matemaatikal ja muusikal, siis ütles Werner: “Oi, nii palju on ühist – muudkui harjuta ja harjuta!” Ja lisas, et muusikast saab lihtsalt kuulates emotsiooni kätte, kuid matemaatikas kuulamisega kaugele ei jõua.

Mis on sinu jaoks koolirõõm?

Pidin ükskord tunni ajal Ahhaa keskuses ettekannet pidama. Õpilased jäid klassi iseseisvalt kordavaid ülesandeid lahendama. Kui tagasi jõudsin, oli kõik minu seitse meetrit tahvlit pilgeni täis kirjutatud. Küsisin, mis toimub. Nad olid teinud ülesannete lahendamise talgud. Kõik lahendati tahvlile, aidati üksteist ja parandati vastastikku vigu. Siis mõtlesin, et äkki ma olen tõesti midagi ära õpetanud ja nad saavadki hakkama!

Milline õpetaja sa oma õpilastele oled?

Püüan olla kõigepealt inimene. Räägime matemaatikatunnis ikka elust ka, arutame haridusprobleeme. Õpilased on natuke kursis, mis ma tegema pean ja millised probleemid matemaatikaõpetajatel on. Ma ei saa seda teha iga klassiga, aga mõni klass mõtleb väga asjalikult ja tuleb kaasa.

Kas nad oskavad ka head nõu ja teist vaadet anda?

Oskavad tõesti! Mõnikord kirjeldan neile mõnd probleemi, et äkki tuleb kellelgi hea mõte. Päris tihti on mõne päeva pärast tuldud oma ideelahendusega. Meie õpilased nõuavad õpetajalt palju, kuid on valmis ka vastu andma.

Mis on kolm asja, mis aitaks õpetaja autoriteeti tõsta?

Hea õpetamisoskus, head teadmised ja vääriline palk. Kui käisime Soomes, siis rääkisid sealsed õpetajad, et neilgi räägiti pikalt palkade tõstmisest, aga ükskord tehti asi lihtsalt ära ja kohe järgnes õpetajaameti maine tõus. Palk on näitaja paljude, ka õpilaste silmis.

Eestis sellist väärtustamist ei tunne. Kõik oskavad siin õpetamise kohta sõna võtta, uskudes, et õpetaja läheb kohe pärast tundide lõppu koju. Ilmselt peavad õpetajad ise ka rohkem selgitama, mis kell nad tegelikult koju lähevad ja millise töökoorma seejuures kaasa võtavad.

Kui oleksid haridusminister, mida sa esimese asjana teeksid?

Hoiaksin seda, mis toimib. Käisime 1995. aastal esimest korda Saksamaal ja sealse kooli õpetajad hoiatasid meid: ärge lõhkuge seda, mis toimib. Nemad olid seda Saksamaal juba teinud ja tulemuseks oli mittetöötav süsteem.

Aga mis meie teeme? Enamik Euroopat õpetab matemaatikat kahel tasandil ja meiegi oleme seda enam-vähem rakendanud. Nüüd aga nõutakse kahele eksamile mingit ühisosa. Õpetame erinevalt, aga küsida tahame ühtemoodi. Kuidas nii saab? Ei saagi. Kes õpib kitsast matemaatikat, see peaks tegema kitsa eksami, ja kes on valinud laia, see laia eksami.

Kust on tulnud Eesti matemaatika hea tase? E-eksami koosolekul vastas mu endine kolleeg Hannes Jukk sellele küsimusele nii: "Matemaatika head taset Eestis on laotud rohkem kui sada aastat, alates Gerhard Rägo naasmisest Eestisse. Oleks kuritegu seda lammutama hakata."

Matemaatikat peetakse raskeks aineks.

Tegelikult pole ta nii keeruline, kui usutakse. Arvan, et matemaatika on lihtsam kui malemäng. Mõned kindlasti ei nõustu sellega, aga kui võtta gümnaasiumis mingi kursus või põhikoolis teema, siis on malemäng igal juhul keerulisem kui selle ühe teema äraõppimine.

Mõnele teeb matemaatika raskeks see, et loomingulisuse kõrval on seal ka paras annus rutiini. Kõikidel ametitel, näiteks politseinikel, arstidel, õpetajatel on omad rutiinsed tegemised. Õpilane kogeb seda rutiini matemaatikat õppides ja mujal samuti.

Oled üksteist aastat vedanud koolimatemaatika ühenduse ehk KMÜ tööd.

Tööd on palju, kolm suurt üritust igal aastal – suvel, sügisel ja talvel. Neile lisanduvad veel koolitused, kus on meile abiks olnud Eesti Matemaatika Selts. Meie ütleme suur selts, sest KMÜ on EMS-i sektsioon. Kui leiame mingi olulise teema, siis MTÜ kaudu saame kiiresti toimetada. Lisaks õpilastele mõeldud võistlused, mille korraldamisega tegeleme.

Kas projekti kirjutamine on veel väljakutse või juba tüütu kohustus?

Praegu tundub juba tüütu kohustusena. Innove projektidega oleme saanud palju raha oma töö jaoks. Kahjuks ei ole saanud taotleda raha riigist väljas käimiseks. Ka välisriigist lektori oleme kutsunud siia oma raha eest. Juba traditsioonilisi koolitusi saame suhteliselt odavalt aineliidus ära teha.

Kas matemaatikaõpetaja on selle 11 aasta jooksul muutunud?

Matemaatikaõpetajate päevadel Viimsis just vaatasin, et oleme endiselt kihvt seltskond. Aga kahjuks ei tule paljud õpetajad üritustele kohale ja tegelikult ei mahu ka. Mõni kool ongi nii toimetanud, et üks aktiivne käib kohal ja viib info teistele kätte. Viimastel üritustel on väga vähe uusi nägusid näha olnud.

Milliste harrastustega tegeled?

Harrastuseks on mul matemaatika. Tunnen rõõmu, kui leian uusi ülesandeid. Klassijuhatajana olen viinud kõik oma klassid teatrisse ja nad on jäänudki teatris käima. Viimase klassiga lugesime oma kolme aasta teatriskäigud kokku ja saime 12.

Mulle meeldib ka reisida. Olen armunud Hiiumaasse, mulle meeldib Võrumaa. Väga kaugele ma ei sõidaks, Euroopast mulle piisab. Näiteks Norras ja Šveitsis võiksin käia lõputult. Mäed ja vesi tõmbavad mind, turistide tõmbekeskused mitte. Mulle piisab sellest, kui saan ronida kaks tundi mäkke ja avastada, et ülevalt avaneb väga ilus vaade.

Kas sinu lapsed ja lapselapsed jagavad su matemaatikavaimustust?

Kõik mu kolm last on lõpetanud Treffneri gümnaasiumis reaalklassi ning kahele neist olen olnud matemaatikaõpetaja ja klassijuhataja. Keskmisel lapsel on õnnestunud minust mööda minna. Matemaatikaga ei ole olnud probleeme mitte ühelgi. Ja kui omad lapsed ütlevad, et olin hea õpetaja, siis see on ikka kõige suurem kiitus, sest nemad on tavaliselt kõige kriitilisemad. Õpetajateks ei ole nad läinud, kuid õpetamise maitse on koolitajatena suhu saanud. Lapselapsed on veel väikesed, kuid kommidega suudavad juba liitalahutada küll.

(Anne Aasametsa intervjuu Hele Kiiseliga ilmus Õpetajate Lehes 19. veebruaril 2016.)

Raili Vilt

Tartu Ülikooli teaduskooli metoodik RAILI VILT sai 2016. aastal Vabariigi Presidendi reaalteaduste eripreemia. Seoses sellega on põhjust peatuda tema tegemistel teaduskoolis ja vaadelda, milline on olnud tema panus Eesti haridusellu.

Minu esimene teadvustatud kokkupuude Tartu Ülikooli ja teaduskooliga seostub just Railiga. Olin kaheksandas klassis kutsutud Tartusse osalema matemaatika huvipäeval, mis toimus füüsikahoones aadressil Tähe 4 ja kus õppetööd viis läbi Raili. Kaheksandas klassis võtsin ka oma esimese teaduskooli kaugõppekursusena Raili loodud ja juhendatud matemaatikakursuse, millest mäletan, et see oli küll üpris keeruline ja püsivust proovile panev, kuid samas väga huvitav ja arendav.

Raili on teaduskoolis töötanud alates 1994. aastast ning tema tööalase tegevuse fookuses on eriti just põhikoolile suunatud matemaatika-alase tegevuse korraldamine ja koordineerimine ning õppetöö: teaduskooli kursuste materjalide väljatöötamine ning kursustel osalevate õpilaste tööde hindamine ja neile tagasiside andmine. Raili on välja töötanud sisukad ja mitmekülgsed õppematerjalid teaduskooli kursustele "Huvitavad arvud" ja "Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks I, II" (õppematerjalid on teaduskooli kodulehelt vabalt leitavad), kus pööratakse erilist rõhku tõestamisele ja loogilisele arutlusele, mis loob õpilastele edaspidiseks väga tugeva vundamendi reaalainetega süvitsi tegelemisel. Neil kursustel õpib Raili käe all igal aastal kokku üle 300 põhikooliõpilase üle Eesti.

Raili eestvedamisel on Eestis alates 1996. aastast korraldatud matemaatikavõistlust Känguru, mis on nüüdseks kasvanud suurima osavõtjaskonnaga ainevõistluseks Eestis, kus 2017. aastal osales rekordiliselt 22 706 õpilast 401-st koolist. Samuti on Raili toimetanud ja koostanud kümmekonna aasta jooksul hulgaliselt ülesandeid Nupuvere veebilehele, mis on pakkunud ja pakub lisamaterjali matemaatikas, keemias ja füüsikas tuhandetele Eesti põhikooliõpilastele ja õpetajatele.

Raili kuulub Eesti matemaatikaolümpiaadi žüriisse, olles ühtlasi selle korraldava komisjoni esimees. Lisaks olümpiaadiülesannete koostamisele tegeleb Raili ka matemaatikaviktoriini Nuputa erinevate voorude ülesannete koostamise ja lõppvõistluse korraldamisega. Raili on ka nõutud lektor: teda kutsutakse esinema Eesti matemaatikaõpetajate kogunemistele, koolide huvipäevadele, piirkondlikele õpilasüritustele (näiteks Võru- ja Põlvamaa õpilaste laager), koolide matemaatikalaagritesse (näiteks Hugo Treffneri gümnaasiumi matemaatikalaager).

On imetlusväärne, millise pühendumuse ja energiaga on Raili panustanud kõigisse loetletud tegevustesse, mille mõju ja ulatuse üle tasub veidi mõtiskleda. Reaalhariduse võtmeküsimuseks on, kui hästi suudame teha reaalained õpilaste jaoks atraktiivseks eriti just varajases eas ja suunata neid varakult iseseisvalt õppima, arenema ja pingutama vastavalt oma võimetele ja veel nii, et õppimine oleks nauditav. Varajane start on ülioluline nii lapse ealise õppimisvõime kui ka teadmiste eksponentsiaalse kasvu kontekstis (uusi teadmisi ja oskusi saab omandada neid vaid olemasolevatega sidudes – mida varem alustada, seda kaugemale võib jõuda). Samuti, kui mõelda õpilaste erinevate huvide ja võimete peale, siis on paratamatu, et koolides peavad õpetajad lähtuma keskmise õpilase tasemest, kuid soovime ju, et ka võimekamad ja matemaatikast süvitsi huvitatud õpilased leiaksid tee huvitavate ja vaimset pingutust nõudvate matemaatiliste harjutusteni. Neid eesmärke täidavad mitmed õppematerjalid, ülesannete kogud ja võistlused, mille koostamist ja läbiviimist Eestis on suuresti juhtinud just Raili. Seetõttu on mul hea meel, et Raili hindamatut panust Eesti reaalhariduse arendamisel on tunnustatud Vabariigi Presidendi 2016. aasta reaalteaduste eripreemiaga.

Nüüd, aastaid pärast minu esmatutvust ülikooli ja teaduskooliga, töötan ka ise teaduskoolis. Mine tea, millist mõju avaldas mulle varane kokkupuude Raili matemaatikakursustega, et ka hiljem ise reaalainetega süvitsi tegelema kaldusin.

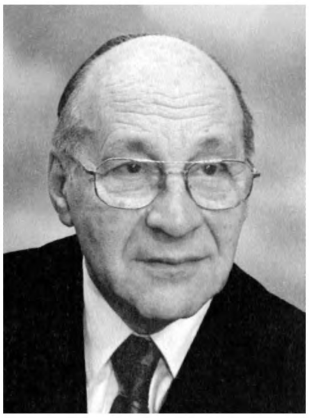
Ütlen lõpetuseks veel töökaaslase pilgu läbi Raili iseloomustuseks, et lisaks matemaatika õpetamisse süvenemisele jõuab ta teaduskoolis olla ka aktiivne panustaja aruteludel ja ürituste korraldamisel, tema analüütiline meel aitab välja tuua nii kitsaskohti kui võimalusi teaduskooli tegevustes ja arengusuundades.

MIHKEL KREE
TÜ Teaduskool

IN MEMORIAM

Simson Baron

20.04.1929 – 12.04.2013



12. aprillil 2013 saabus Iisraelist kurb teade. Manalateele oli läinud Tartu Ülikooli legendaarne õppejõud, Bar-Ilani Ülikooli emeriitprofessor ning rahvusvaheliselt tunnustatud teadlane summeeruvusteoorias, Simson Baron.

Simson Baron sündis Tartus 20. aprillil 1929 Tartu rabi Avraham David Baroni ja Ettel Baroni (neiuna Antin) esimese lapsena. Oma kooliteed alustas Simson Baron 1935. aastal Tartu 17. koolis. Et mitte jääda sõjale jalgu, siirdus tema pere 1942. aastal Tšuvaššiasse Alatõri linna, kus koolitöö kõrval töötas S. Baron kellassepana. Pärast sõja lõppu saabus tema pere tagasi Tartusse ning Simson Baron jätkas õhtukoolis õppimise kõrval tööd kellassepana. 1951. aastal lõpetas S. Baron Tartu Õhtukeskkooli ja astus Tartu Riiklikku Ülikooli matemaatikat õppima. Õhtuti töötas ta matemaatikaõpetajana Tartu Õhtukeskkoolis.

Lõpetanud kiitusega ülikooli 1956. aastal, jätkas ta õpinguid aspirantuuris prof. Gunnar Kangro juhendamisel. Tema lemmikvaldkonnaks matemaatikas kujunes summeeruvusteooria, täpsemini ühe- ja kahekordsete arvridade summeeruvustegurite probleemid.

1959. aastal kaitses Simson Baron edukalt oma väitekirja ja talle omistati füüsika-matemaatikateaduste kandidaadi kraad. Pärast väitekirja kaitsmist, töötas Baron õppejõuna Tartu Riiklikus Ülikoolis, algul vanemõpetajana ning aastast 1963 dotsendina. 1959. aastal abiellus Simson arstiga Tamar Zeitchik Leningradist. Nende perre sündisid kolm last: David, Hene ja Leah. 1979. aasta novembris lahkus Simson Baron koos perega Eestist ning siirdus Iisraeli, kus peagi asus tööle matemaatikaprofessorina Bar-Ilani Ülikoolis. Õppetöö kõrval luges Simson mitmetes sünagoogides laupäeva hommikuti toorat. 1997. aasta sügisel S. Baron emeriteerus ning talle omistati emeriitprofessori nimetus. Tunnustamaks dotsent Simson Baroni tõhusat tööd Tartu Ülikoolis, omistati talle 2007. aastal Tartu Ülikooli emeriitdotsendi nimetus.

S. Baroni teadustööd läbivaks teemaks on olnud kahekordsete arvridade koonduvus ja summeeruvus. Tähelepanu pälvis juba tema diplomitöö kahekordsete arvridade koonduvustunnustest. Aspirantuuri päevil jätkas ta uurimusi selles vallas juba üldisemalt, vaadeldes kahekordsete arvridade summeeruvuse probleeme. Oma uurimused arvridade summeeruvusest avaldas ta 1966. aastal sisuka monograafiana (1977. aastal ilmus täiendatud trükk), mida kasutatakse tänaseni.

Simson Baron avaldas ligi sada publikatsiooni, millest üle 60 on summeeruvusteooriast (peamiselt arvridade summeeruvusteguritest) ja funktsiooniteooriast. Ta oli matemaatilise analüüsi neljaosalise ülesannete kogu üks autoritest. Lisaks õppekirjandusele ja teadusartiklitele avaldas ta ligi pooltuhat referaati erinevatele referatiivajakirjadele matemaatikas. Aastatel 1957–79 oli ta ajakirja "Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised. Matemaatika- ja mehaanikaalaseid töid" tegevtoimetaja. Tema erakordset abi ja hoolt artiklite toimetistes avaldamisküpseks seadmisel, mäletavad tänutundega tema kaasaegsed, kes nendel aastatel kaitsesid oma väitekirja. Alati hoolitses ta selle eest, et igaks kaitsmiseks oli vajalik toimik ilmunud, mis kajastas kaitsja teadustööd.

Simson Baron oli nii üliõpilaste kui ka kolleegide poolt kõrgelt hinnatud pedagoog. Tema humoorikad naljad lõbustasid kõiki. Tuginedes eesti keele omapärale ja mitmetähenduslikele sõnadele, kasutas ta teadlikult mõningaid sõnu mittesobivas kontekstis. Tänaseni meenutatakse tema heatahtlikke nalju.

Simson Baroni juhendamisel on kaitstud 2 väitekija (Mati Abeli väitekiri Tartu Riiklikus Ülikoolis 1971. aastal ning Shlomo Janetzi väitekiri 1989. aastal Bar-Ilani Ülikoolis).

2007. aasta kevadel külastas Simson Baron oma armsaks jäänud sünnilinna Tartut koos abikaasa, tütre Leah ja tema abikaasaga. Nad käisid isa haual Tartu Juudi kalmistul ning Simson Baron esines Tartu Ülikoolis loenguga oma elust ja tegemistest pärast Tartust lahkumist oma endistele õpilatele ja kolleegidele. 2009. aastal tähistas Bar-Ilani Ülikool emeriitprofessor Simson Baroni 80-ndat sünnipäeva minikonverentsiga, millel esinesid prof. Mati Abel Tartu Ülikoolist ülevaatega juubilari tegevusest Eestis enne saabumist Iisraeli ning Maria Zeltser Tallinna Ülikoolist ettekandega kahekordsete arvridade koonduvusest, probleemist, millega oli varem tegelenud juubilar. Juubelikonverentsist võtsid osa veel Jeruusalemas elav Tartu Ülikooli emeriitdotsent Heino Türnpu abikaasaga, dotsent Elts Abel ja vanemteadur Mart Abel, kes tegutses konverentsil inglise-vene keele tõlgina.

2013. aasta kevadel Simson Baron kukkus ja murdis puusaluu. Operatsioon möödus küll edukalt, kuida haava sattunud bakter, mis ootamatult kustutas ta eluküünla. Simson Baron maeti Jerusalemma Givat Shauli kalmistule. Tema hauda tähistab marmorist massiivne hauakivi. 8. juulil 2014 lahkus ka abikaasa Tamar ning maeti samale kalmistule Simson Baroni kõrvale.

Mälestus Simson Baronist jääb alatiseks meiega.

Õpilaste ja kolleegide nimel

Mati Abel
Tartu Ülikool

Virge Soomer

01.08.1945 – 16.07.2013

Südasuvel, pisut rohkem kui kaks nädalat enne oma 68. sünnipäeva, lahkus ootamatult kauaegne matemaatilise analüüsi õppejõud Virge Soomer. Ta lõpetas oma viimast töösemestrit Tartu Ülikoolis, et uue semestri algusest jätkata emeriitdotsendina, kuid seda tiitlit tal kanda ei õnnestunud.

Virge sündis Vändras, lõpetas Keila Keskooli 1963. a., matemaatikudiplomini Tartu Riiklikus Ülikoolis jõudis ta 1968. a. Kolmele aastale assistenditööle matemaatilise analüüsi kateedris järgnes aspirantuur Gunnar Kangro juhendamisel, füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi kaitses ta 1975. a. Pärast lühiajalist töötamist Eesti Põllumajanduse Akadeemias ja Tallinna Pedagoogilises instituudis naases ta 1976. a. TRÜ-sse vanemõpetaja kohale matemaatilise analüüsi kateedris. Alates 1982. aastast oli ta samas dotsent.

Virge teadustöö oli seotud summeeruvusteooria ning jadaruumidega. Kandidaaditöö teema, mille juhendaja talle uurida andis, oli seotud tollal populaarse jadade peaaegu koonduvuse probleemiga. Virge oli esimene, kes uuris selle koonduvusega seotud jadaruumide struktuuriküsimusi. Neile lähedaste probleemidega (peaaegu tugev summeeruvus, maatriksite jadaga esitatud summeerimismenetlused, summeeruvustegurid) jätkas ta ka pärast kraadi kaitsmist, nende juurde suunas ta ka tudengeid, kes tema juhendamisel oma lõputööd kirjutasid.

Lektorina õpetas Virge põhiliselt analüüsi valdkonna aineid nii oma kui ka teiste teaduskondade üliõpilastele. Ta oli hinnatud õppejõud, oma osa mängis selles tema rahulik loomus ning sõbralik suhtumine tudengitesse. Eriti tihedad olid tema sidemed füüsikutega, kellele ta pikki aastaid luges matemaatilise analüüsi ja hiljem kõrgema matemaatika kursust. Seejuures oli ta matemaatikute kõneisik füüsikute juures, aruteludes matemaatika õpetamise üle suutis ta kõige paremini kummalegi osapoolele vahendada teise poole seisukohti.

Oma õpetamiskogemusi rakendas ta õppevahendite koostamisel, neist tähelepanuväärseim on kolleegi Leiki Loonega kahasse kirjutatud õpik *Matemaatilise analüüsi algkursus* (2007, kordustrükk 2009).

Kolleegidele jääb Virge meelde abivalmi, tagasihoidliku ja sõbraliku inimesena.

Toivo Leiger
Tartu Ülikool

Frederik Vichmann

22.04.1935 – 05.08.2013

5. augustil 2013 suri pärast rasket haigust matemaatikainstituudi emeriitdotsent Frederik Vichmann. Viimsi uues kirikus olid teda 10. augustil manala teele saatmas poja pere, endised kolleegid ja lähemad tuttavad ülikoolist.

Frederik Vichmann sündis 22. aprillil 1935. a. Pärnus. Tema ema oli apteeker ja isa töötas laevandusfirmas, hiljem isa lõi uue pere. Nii ta kirjutaski hiljem oma ankeetidesse ametnike ärritamiseks sotsiaalseks päritoluks väikekodanlane. Pärnus alustas ta ka kooliteed ja lõpetas 1953. aastal tolleaegse Pärnu I keskkooli, mis aasta varem oli muudetud poistekoolist segakooliks. Lõpetamisel saadud hõbemedal näitab, et Vichmann oli edukas õpilane. Kaasõpilased mäletavad teda mitmekülgsete huvidega noormehena, kes nende teada oli läbi lugenud kõik vähegi lugemist väärivad raamatud Pärnu raamatukogudes. Keskkooli lõpetamise järel asus Frederik õppima Tartu Riiklikku Ülikooli matemaatikat, kusjuures teiseks sobivaks valikuks pidas ta bioloogiat.

Frederik Vichmann lõpetas ülikooli *cum laude* 1958. aastal. Tema kursusekaaslasteks olid hilisemad pikaajalised kolleegid TTÜ matemaatikainstituudis Aksel Jõgi ja Ahto Lõhmus. Kohe pärast ülikooli lõpetamist jätkas F. Vichmann õpinguid aspirantuuris TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri juures professor Gunnar Kangro (1913–1975) juhendamisel. Alates 1962. aastast oli Frederik Vichmann seotud Tallinna Tehnikaülikooliga. Tehnikaülikool oli tema esimene ja viimane töökoht. Alustanud assistendina (1962–1963), jätkas vanemõpetajana (1964–1965) ning dotsendina alates 1966. aastast. F. Vichmann emeriteerus 2006. a., kuid ta jätkas siiski veel õppetööd erakorralise lektorina kuni 2010. aastani.

1963. aastal kaitses F. Vichmann Eesti NSV TA Füüsika-Matemaatika ja Tehnikateaduste Osakonna Nõukogus kandidaaditöö ridade teooriast teemal "Üldistatud summeeruvustegurid", mida oponeerisid prof. B. Rõmarenko ja dots. S. Baron. Töötades õppejõuna, jätkas F. Vichmann uurimistööd samas valdkonnas. Tema põhilised teadustulemused on seotud mitmet tüüpi summeeruvustegurite ning ridade ja integraalide summeerimismenetluste sisalduvuse tingimuste leidmise ja lõpmatute korrutiste summeerimisega. Aastail 1975–1987 oli ta kateedris teadusliku töösuuna "Ridade teooria" teaduslik juhendaja. Oma sügavaid erialalisi teadmisi rakendas ta raadiotehnika kateedris teostatavate lepinguliste tööde täitmisel, kus tal tuli lahendada probleeme, mis olid seotud Fourier' diskreetse teisenduse ja kiire teisenduse algoritmi realiseerimisega arvutites ja efektiivsete algoritmide väljatöötamisega signaalide arvutil töötlemisel.

F. Vichmann oli hinnatud lektor ja nõudlik pedagoog. Olles matemaatilise analüüsi õppetooli koosseisus, luges ta aastaid matemaatilise analüüsi (I ja II), kompleksmuutuja funktsiooni teooria ja funktsionaalanalüüsi kursust nii eesti kui ka vene keeles. Eksamil oli temalt raske saada kõrgeimat hinnet. Ta võitles nn lauaaluse tegevuse vastu eksamil, saavutades selles ka märkimisväärset edu. Ent üliõpilased hindasid teda ja pidasid õiglaseks õppejõuks. Õpetamise kõrval koostas ta mitmeid õppevahendeid, nendest originaalseim on 2002. a. ilmunud "Funktsionaalanalüüsi elementaarkursus".

Frederik Vichmann oli matemaatikainstituudi juhtiv dotsent. Kõigist instituudi tegemistest võttis ta aktiivselt osa. Tema poole pöörduti nõu saamiseks probleemsete küsimuste lahendamisel, talle usaldati mitmeid vastutusrikkaid ülesandeid. Nii näiteks oli tema korraldada üliõpilaste matemaatikaalane referatiivne ja teadustöö (endine ÜTÜ). Sellega oli ta seotud üle kahekümne aasta. Samuti organiseeris ta matemaatikaolümpiaade TTÜ-s, treenis vastavat vabariigi koondist üleliidulisteks olümpiaadideks ning oli TTÜ meeskonna juhendajaks neil olümpiaadidel väljaspool Eestit (Omsk 1981, 1984; Taškent 1986, 1988). Eriti häid organisaatorlikke võimeid näitas F. Vichmann teadusliku sekretärina kahel Tallinnas toimunud piirkondlikul Valgevene, Läti, Leedu, Eesti NSV ja Vene NFSV Kaliningradi oblasti kõrgkoolide kateedrijuhatajate ja juhtivate õppejõudude nõupidamisel-seminaril aastatel 1973 ja 1987. Mõlemal korral leidis see töö äramärkimist üleliidulise ministri käskkirjas.

Frederik Vichmann oli hea keeletunnetusega ja organisatoorivõimetega. Lisaks emakeelele luges ta kirjandust inglise, vene ja saksa keeles. See võimaldas tal olla aastail 1965–1967 TPI Toimetiste matemaatikaartiklite kogumike vastutav toimetaja ja aastail 1992–1994 "TTÜ Toimetised. Matemaatika. Füüsika" toimetuskolleegiumi esimees. 1997. aastal osales ta prof. I. Tammeraidi õppevahendi "Lineaaralgebra rakendusi" inglise keelde tõlkimises ja kogu ingliskeelse teksti redigeerimises. Kui Eestil tekkis võimalus osaleda TEMPUS-projektides, õnnestus F. Vichmannil kirjavahetuse tulemusena leida rahvusvahelised partnerid Soomest, Inglismaalt ja Saksamaalt. F. Vichmann osales projekti TEMPUS-Jep-11202-96 koostamises ja oli tegev töögruppides, mille raames toimusid teadusalased visiidid Tampere, Müncheni, Madridi ja Sunderlandi tehnikaülikoolidesse. Aastast 1995 kuni emeriteerumiseni oli ta Euroopa insenerihariduse probleemidega tegeleva organisatsiooni SEFI matemaatika töögrupi esindaja Eestis.

F. Vichmann tundis suurt huvi nii ülikoolis, ühiskonnaelus kui ka maailmas toimuva vastu. Meie ülikoolis oli ta aktiivselt tegev ametiühingus, olles aastail 1969–1974 ja 1989–1995 oma teaduskonna a/ü büroo esimees.

Inimesena oli F. Vichmann põhimõttekindel ja õiglane. Seetõttu tekkis tal vastuolusid ülikoolis vastutavatel ametikohtadel töötavate isikutega ja teda ei edutatud juhtivatele kohtadele, ehkki ta oleks edutamist väärinud. Olles TPI sisseastumis-eksamite matemaatika ainekomisjoni esimees, keeldus ta kategooriliselt vastu võtma mõningate tähtsate tegelaste esitatud soove üliõpilaskandidaatide erikohtlemiseks. Kord nõukogude piirvalvuritega vaidlemise eest Saksa Demokraatlikust Vabariigist legaalselt ostetud piibli pärast olid F. Vichmanni välisreisid edaspidi kuni uue Eesti ajani keelatud.

F. Vichmann oli äärmiselt mitmekülgne ja laialdaste huvidega. Hea keelteoskus ja vaibumatu rännukihk viis teda peaaegu kõikidesse liiduvabariikidesse ja hiljem maailma erinevatesse paikadesse. Oma puhkused veetis ta tavaliselt reisides. Iseloomulik oli tema erakordselt suur kunsti-, teatri- ja muusikahuvi. Harvad olid need hea klassikalise muusika kontserdid, mille publiku hulgast puudus F. Vichmann. Vähesel määral tegeles ta ka filateeliaga. Kuid tema tõeline kirg ja armastus olid raamatud. Oma kodus oli ta osavalt riiulitesse mahutanud 120 jooksvat meetrit hoolikalt valitud väärtuslikku kirjasõna ja rariteete. Polnud sportki talle võõras. TTÜ võistkonna ridades lauatennist mängides kaitses ta ligi 25 aasta jooksul oma ülikooli au kõrgkoolidevahelistel võistlustel nii kodus kui ka võõrsil.

Frederik Vichmanni jäid leinama juristiharidusega poeg Marcel ja pojapoeg Marlon, samuti sõbrad ja kolleegid TTÜ matemaatikainstituudist.

Peeter Puusemp
Tallinna Tehnikaülikool

Lembit Kivistik

26.01.1930–22.07.2014

Lembit Kivistik on sündinud Viljandimaal Puiatu vallas talupoja perekonnas. Pärast Viljandi 2. Keskkooli lõpetamist 1950 jätkas ta õpinguid Tartu ülikooli matemaatika osakonnas, mille edukalt lõpetas 1955. aastal. Seejärel töötas ta kaks aastat matemaatikaõpetajana Tartu 1. Töölisnoorte Keskkoolis.

Juba üliõpilasena oli Lembit Kivistik saanud sisukaid tulemusi iteratsioonimeetodite koonduvuse uurimisel. Teadustööd jätkas ta aspirantuuris aastatel 1957–60 ning tollal noore õppejõu Ülo Kaasiku juhendamisel valmis väitekiri "Iteratsioonimeetoditest Hilberti ruumis", mille eest Tartu ülikool omistas talle 1961. a. füüsika-matemaatikateaduste kandidaadi teadusliku kraadi.

Aastast 1960 oli Lembit Kivistik Tartu ülikooli õppejõud, aastast 1962 dotsent ning aastast 1996 emeriitdotsent. Esialgu töötas ta geomeetria kateedris, mille juurde loodud arvutuskeskusesse saabus esimene elektronarvuti Eestis (Ural). Hiljem siirdus ta geomeetria kateedri baasil loodud matemaatilise statistika ja programmeerimise kateedrisse, olles selle juhataja aastatel 1974–79.

Ülikoolis on Lembit Kivistik õpetanud arvutite kasutamisega seotud kursusi nagu arvutusmeetodid, matemaatiline planeerimine, optimiseerimismeetodid, operatsioonianalüüsi matemaatilised meetodid, mängude teooria jt. aga ka põhikursusi kõrgem algebra, matemaatiline analüüs, arvuteooria, variatsioonarvutus jt. Üliõpilaste ja kolleegide hulgas oli ta tuntud korrektse, tagasihoidliku, tasakaaluka, aga ka nõudliku õppejõna. Tema loengud olid hinnatud eelkõige ülima täpsuse ja korrektsuse, aga ka laitmatu loogilise ja metoodilise ülesehituse poolest. Ta on avaldanud hoolikalt viimistletud õpikuid ja loengukonspekte: "Operatsioonianalüüs" (1982, koos Ülo Kaasikuga), "Arvuteooria" (1968, 2. trükk 1974, koos Jakob Gabovitšiga), "Variatsioonarvutus" (1965), "Täisarvulise planeerimise lõikealgoritmid ja nende kiirendamine" (1993).

Lembit Kivistiku hilisemad teaduslikud tööd on seotud peamiselt matemaatilise planeerimisega, olulisemateks tulemusteks on täisarvulise planeerimise lõikealgoritmide kiirendatud variantide väljatöötamine ja nende lõplikkuse tõestamine. Viimasesse valdkonda kuuluvad ka tema õpilaste tööd.

Hea teadlase tunnuseks on ka osavõtt ühiskonnaelu probleemide lahendamisest. Lembit Kivistik on ajakirjanduses kaasa rääkinud mitmeski probleemis nagu alkoholi kuritarvitus, Tartu planeerimine, Eesti rahvuse kaitse jt. Talle oli omane just probleemide varajane nägemine, nende sügavalt loogiline analüüs, samuti sirgjoonelisus ning julgus oma seisukohtade esitamisel. Vaba aega armastas Lembit Kivistik veeta looduses ja kalavetel.

Lembit Kivistiku lahkumine oli valusaks kaotuseks tema sõpradele ja kolleegidele.

ENN TAMME
Tartu Ülikool

Arno Kass

01.12.1929 – 09.11.2014

9. novembril 2014. a. lahkus meie seast kauaaegne Tallinna Tehnikaülikooli matemaatikaõppejõud Arno Kass.

Arno Kass sündis 1. detsembril 1929. a. praeguses Põdrala vallas Valgamaal. Ta vanemad – ema Salme ja isa Johan – pidasid talu, pärast sõda aga olid kolhoosnikud. Alghariduse omandas A. Kass Riidaja 6-klassilises koolis aastail 1938–1944, keskkoolihariduse aga Tõrva keskkoolis, mille lõpetas 1949. a. kevadel.

1949. a. sügisel jätkas A. Kass õpinguid Tartu Riikliku Ülikooli matemaatika-loodusteaduskonna matemaatika-mehaanika osakonnas. Ülikooli lõpetas ta 1954. a. juunis mehaanika erialal. Ülikooli ajal töötas ta viimasel kursusel pool aastat (detsember 1953 – juuni 1954) EPA matemaatika kateedri laborandina.

Pärast ülikooli lõpetamist töötas A. Kass kuus aastat matemaatika- ja füüsikaõpetajana, aastail 1954–1957 Suure-Jaani keskkoolis ning seejärel Tallinna 10. keskkoolis (1957–1960). Tallinna Polütehnilise Instituudi hoogsa laienemise perioodil avanes tal võimalus asuda tööle TPI-sse. Nii oligi A. Kass alates 1960. a. septembrist kuni pensionile minekuni 1998. a. augusti lõpus Tallinna Tehnikaülikooli teenistuses, kogu aeg matemaatika kateedris/instituudis. Ta alustas assistendina, kuid juba 1962. a. valiti ta vanemõpetajaks. Vanemõpetaja oli ta 30 aastat, kuni 1992. aastani. Ametinimetuste muutumisega seoses oli A. Kass viimastel aastatel matemaatikainstituudis töötamise ajal lektor (1992–1998).

Tehnikaülikoolis töötades luges A. Kass kõiki matemaatilisi üldkursusi, põhiliselt kõrgemat matemaatikat, matemaatilist analüüsi ja lineaaralgebrat. Ta oli üliõpilaste poolt hinnatud lektor, paistes silma loengute hea ülesehituse ja oma huumorimeelega. Ehkki ta sooritas ka kaks kandidaadimiinimumi eksamit (filosoofia ja võõrkeel), teadustööle ta siiski ei pühendunud temale sobiva teadusteema puudumise tõttu. A. Kassi huvid olid seotud matemaatika õpetamise metoodikaga ja tema sulest ilmus tehnikaülikoolis töötamise jooksul arvukalt metoodilisi juhendeid ja ülesannete kogusid. Kuna ta oli töötanud keskkooliõpetajana, siis tundis ta hästi koolimatemaatika probleeme. Seetõttu kirjutas A. Kass koos kolleegidega (E. Etverk, A. Garšnek, P. Kass, H. Krusberg, M. Teeäär) 64-leheküljelise brošüüri *Harjutusi ja ülesandeid keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks*, millest ilmus TPI rotaprindil viis trükki (1962, 1965, 1967, 1969, 1971). Sama kollektiiv kirjutas ka kaheosalise õpiku *Õpik keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks I, II* (112 lk. ja 128 lk.), millest ilmus samuti viis trükki (1963–1971). Järgnesid sarnased trükised teiste pealkirjade all. Üliõpilastele kirjutas A. Kass metoodilisi juhendeid põhiliselt kaugõppe jaoks.

Eelöeldut arvestades on üsna loomulik, et A. Kass määrati korduvalt tehnikaülikooli vastuvõtueksamite matemaatika ainekomisjoni nii aseesimeheks kui ka esimeheks. Nende vastutusrikaste ülesannetega sai A. Kass hea suhtlemisoskuse tõttu hästi hakkama. Nende ametite täitmise eest sai ta enamasti rektori käskkirjaga kiita, aga oli ka juhus, kus talle koos kolleegidega avaldati rektori käskkirjaga märkus vastuvõtueksamite eeskirja rikkumise eest. Siin pole aga midagi imestada, sest tol ajal oli tüüpiline, et eksamipäeva hommikul tuli ülikooli partorg eksamikomisjoni esimehe juurde nimekirjaga sisseastujatest, kes pidid tingimata kõrge hinde saama. Ja sellises olukorras oli lihtne eksida.

Ka pärast pensionile jäämist aitas Arno Kass mitmel korral matemaatikainstituuti õppetöös, lugedes lineaaralgebra kursust. Pidevalt võttis ta osa matemaatikainstituudi üritustest.

Arno Kass kasvatas üles kaks poega, Indreku ja Joeli. Tema abikaasa Pilvi Kass töötas samuti matemaatika kateedris, olles oma varase surmani 1977. a. assistent.

Mälestus Arno Kassist kui TTÜ matemaatikakateedri/instituudi raudvarast jääb veel kauaks püsima nooremate kolleegide mälusse.

PEETER PUUSEMP
Tallinna Tehnikaülikool

Uno Tiidt

12.07.1932 - 07.12.2014

Uno Tiidt sündis Valga maakonnas Kuigatsi vallas ehitus- ja teetöölise kuuelapselise pere neljanda lapsena. Pärast Valga keskkooli lõpetamist jätkas õppimist TRÜ matemaatika-loodusteaduskonnas matemaatika osakonnas (1951–1956). Uno oli aktiivne kursusevanem ja töötas õpingute kõrvalt Tartu 1. töölisnoorte keskkoolis matemaatika ja füüsika õpetajana (1953–1955). Lõpetanud ülikooli suunati ta Jõgeva keskkooli õpetajaks ning ta oli septembrist 1958 kuni jaanuarini 1959 Kuremaa metsamajanduse tehnikumi matemaatika ja füüsika õpetaja. Jaanuarist 1959 kuni septembrini 1959 töötas ta TRÜ geomeetria kateedri assistendina ja pärast seda Tartu rajooni haridusosakonna inspektorina kuni 15.09.1961. 1961. aastal oli Tartu 8. keskkooli õpetaja. Tema edaspidine elukäik kuni pensionile siirdumiseni 2005. a. oli seotud EPA-ga: teoreetilise ja rakendusmehaanika kateedri assistent (1962–1965), TUS-i vanemteadur (1965–1968), matemaatika kateedri assistent (1968–1976), õpetaja (1976–1979), vanemõpetaja (1979–1992), EPMÜ matemaatika lektoraadi lektor (1992-1993), matemaatika instituudi õpetaja (1993–1994) ja lektor (1994–2005). Siis siirdus ta pensionile. Uno Tiidt oli õppejõud, kes pidevalt ajakohastas ja täiustas oma pedagoogilisi ja erialaseid teadmisi. Metoodika täiustamise eesmärgil töötas ta kohakaasluse alusel TRÜ matemaatika õpetamise kateedris (1966/1967) ja käis 2 korda stažeerimas matemaatilise planeerimise alal (ENSV TA Küberneetika Instituudis ja Odessa Põllumajanduse Instituudis) ning 2 korda arvutustehnika erialal (TRÜ teoreetilise mehaanika kateedris ja Leningraadi Põllumajanduse Instituudis).

EPA-s õpetas Uno Tiidt teoreetilist mehaanikat, masinate ja mehhanismide teooriat, kõrgemat matemaatikat ja matemaatilist planeerimist. Uno koostas mitmeid õppematerjale ja rea õpikuid nagu "Matemaatiline planeerimine I" (Tartu, 1973 ja 1977, 6 tp.), "Matemaatiline planeerimine II" (Tartu, 1976, 6,25 tp., kaasautor H. Vallner), "Matemaatilise planeerimise ülesannete kogu" (Tartu, 1975, 8 tp., kaasautor H. Vallner), "Kõrgem matemaatika" ja "Analüütiline geomeetria ja lineaaralgebra" (Tartu, 1999, 7 tp.).

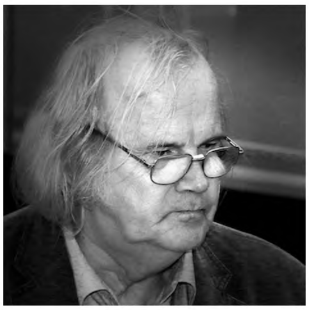
Iseloomult oli Uno tasakaalukas, tagasihoidlik ja abivalmis. Ta oli hoolas, töökas ja hindas täpsust. Oma huumorimeele ja kõneosavuse tõttu oli töökollektiivis ja seltskondlikel üritustel tuntud tegija, paljude seltskondlike ürituste initsiaator. Vajaduse korral viis ta läbi ka ilmalikke matusetalitusi. Oli suur ühiskondliku töö aktivist, korduvalt oli ta hooldusõppejõuks ja ka üliõpilaste tööpraktika juhendajaks. Üliõpilased hindasid tema õppetööd ja juhendamist kõrgelt ning juhendatavad kursused pidasid veel pärast ülikooli lõpetamist oma ühisüritusi koos temaga. Uno Tiidt võttis osa nii teaduskonna a/ü alakomitee, kui ka EPA a/ü komitee õppekasvatustöö sektori tööst. Kõike mida tegi, tegi ta suure hingega.

Uno põrm puhkab Puka kalmistul.

KOLLEEGID EESTI MAAÜLIKOOLIST

Paul Tammela

29.04.1945 – 06.01.2015



Paul on sündinud 29. aprillil 1945 Lelle vallas Pärnumaal, nüüd on see Raplamaa. Pauli isa oli vallavanem, aga ta pidi põgenema uue korra võimude eest juba enne Pauli sündi. Suur sõda oli Eestist äsja üle käinud, aga Ameerikas konstrueeriti esimene elektronarvuti ENIAC. Kes on vahetult pärast sõda ja kolhooside alguse ajal maal elanud teab, et sel ajal oli seal tõeline vaesus, sest riiki valitses proletariaadi diktatuur. Ma ei tea Pauli poisipõlvest maal midagi, aga keskkooli lõpetas ta Tallinna II keskkoolis (Reaalkoolis), mis oli ka sel ajal kuulsate traditsioonidega, võiks öelda eliitkool. Pauli matemaatikahuvi oli siis juba välja kujunenud, mille tunnistuseks on, et ta oli 10.–11. klassis vabariikliku matemaatikaolümpiaadi medalistide hulgas. Sel ajal oli matemaatika õppimine/õpetamine suure au sees, sest matemaatiliste teadmiste abil lendasid sputnikud ja Gagarin tegi ühe tiiru ümber Maa.

Neil aastail oli võimalus kandideerida nn vabariiklikele kohtadele õppimiseks Moskva või Leningradi ülikoolis, aga võib-olla ka mujale. Ma usun, sellest võimalusest haaras Paul kinni suure innuga. Leningradi ülikooli matemaatika-mehaanika teaduskond oli kindlasti maailma parimate hulgas ja ühele eesti soost suhteliselt maavillasele noorukile oli seal õppimine parajaks katsumuseks. Aga paistab, et Paulil läks kõik edukalt, sest ülikooli lõpetamisel 1969 võeti ta kohe aspirantuuri. Sel ajal sai aspirandiks väga valitult, sest kõrgharidus ei olnud veel massiline, rääkimata teaduskraadi taotlemisest. Muide, Pauli kursusekaaslasteks olid Eestist veel neli õppurit ja sellelt kursuselt on välja kasvanud kaks maailmas erialaliselt tuntud nime – üks neist eestlane Taivo Arak.

Kui väitekiri oli 1973. aastal kaitstud – pange tähele, neljandal aastal pärast ülikooli lõpetamist – , tuli Paul Eestisse tagasi ja sai oma esimese töökoha TPI (praegu TTÜ) majandumatemaatika kateedrisse, algul assistendiks. Ise ma tulin TPI-sse paar aastat hiljem ja tutvusin Pauliga üsna varsti – arvatavasti õppejõudude matemaatikaseminaris. Paulil õnnestus 1976/77 10 kuud stažeerida Budapesti Eötvös Lorandi ülikoolis. Pärast stažeerimist pidi kirjutama pika venekeelse aruande, mis lõpuks läks Moskvasse. Kuna Paul oskas hästi vene keelt, siis sain ma paar aastat hiljem oma aruande kompileerimisel tema kirjutatut kasutada.

90-ndate algul muutus töö majandusmatemaatika kateedris ebakindlaks ja Paul kandideeris Tallinna Ülikooli algebra ja geomeetria professoriks. Selle koha sai ta hõlpsasti, sest tal oli CV-s näidata mõned head publikatsioonid üleliidulistes teadusajakirjades – neid tõlgitakse ka inglise keelde. Sattusin Pauli kolleegiks ka TLÜ-s. Paul ei olnud minu otsene tööle võtja, aga kindlasti oli ta mu toetaja. Ma ei mäleta peaaegu ühtegi eriarvamust Pauliga, mis osaliselt seletub muidugi tema lepliku loomusega. Paul oli tegev mitmesugustes komisjonides, aga mitte ainult vaikiv liige, vaid ka ausalt asjade välja ütleja. Ta oli kindlasti mees, kellega olin vajadusel valmis koos luurele minema või ka soolaputkas vee ja leiva peal olema. Meie ülikoolis oli Pauli panuseks ametiühingu tegevus ja selle kaudu ülikooli nõukogus/senatis istumine ning mitmesugustes komisjonides olemine. Aga tema peamine tegevus oli matemaatika osakonnas: ta oli osakonnajuhataja aastail 1996 – 2001, kui osakond oli veel suur võrreldes praegusega; tema mitmekülgne teadmiste pagas võimaldas lugeda eri- ja valikkursusi teemadel, milleks teised kolleegid polnud valmis; Paul oli osakonna peamine arvutispets (vihje teksti algusesse, et Paul on sündinud arvutiga ühel aastal). Arvutiga ei saa vaielda. Kui meil see tahtmine tekkis, oli Paul alati abiks. Üks osakonna jaoks tähtis tegevus oli TEMPUS-e projekt, mille koordinaator oli Paul.

Pauli viimaste aastate teadustegevus ei olnud väga viljakas. Tema uurimuste peateema oli mitmemõõtmeliste ruutvormide taandamine. Väikese muutujate arvu juures on ruutvormide teooria hästi haaratav, aga suurema arvu muutujate korral lootis Paul kasutada arvutite abi. Koostöös oma juhendatavaga, hiljem sai temast meie kolleeg, koostasid nad keerulise arvutiprogrammi, mis töötas kuude viisi meie osakonnas. Kahjuks põhjapanevat tulemust arvutustest ei järgnenud.

Kõik lõppes väga ootamatult ja vaevalt, et Paul jõudis eluga korralikku lõpparvet teha. Aga julgen kinnitada, et ta ei jäänud kellelegi midagi võlgu ja temast ei jäänud maha täitmata lubadusi.

Andi Kivinukk
Pauli lähedane kolleeg aastast 1975
Tallinna Ülikool

Aivo Parring

08.09.1940 - 31.12.2015

Aivo Parring sündis 8. septembril 1940. aastal Võrumaal Veriora vallas talupidaja perekonnas. Ta sai keskhariduse Räpina Keskkoolis, mille lõpetas 1959. aastal, ning asus õppima Tartu Riiklikku Ülikooli (TRÜ). 1964. aastal lõpetas ta TRÜ füüsika-matemaatikateaduskonna ja seejärel töötas Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika instituudis insenerina (1964–1965). 1965. aastal astus Aivo Parring TRÜ algebra ja geomeetria kateedri aspirantuuri, mille lõpetas 1969. aastal. Aspirantuuri ajal töötas ta TRÜ algebra ja geomeetria kateedri assistendina (1965, 1969). Pärast aspirantuuri jätkas Aivo Parring tööd TRÜ algebra ja geomeetria kateedri vanemõpetajana (1969–1973, 1975–1979) ja matemaatilise analüüsi kateedri vanemõpetajana (1973–1975). 1975. aastal kaitses ta Tartus kandidaadiväitekirja diferentsiaalgeomeetria teemal "Afiinse-sümplektilise ruumi sümplektiliste tasandite muutkonnad ja nende siseseostused" ning talle anti füüsika-matemaatikakandidaadi teaduskraad. Aastatel 1979–1999 töötas Aivo Parring TRÜ algebra ja geomeetria kateedris ja hiljem 2002–2006 TÜ Puhta matemaatika instituudis dotsendina ning 1999–2002 oli ta Puhta matemaatika instituudi lektor. Aivo Parring võttis osa õppejõu kvalifikatsiooni tõstmise kursustest Moskva Riikliku

Ülikoolis (1972, 1979) ja Kaasani Riiklikus Ülikoolis (1985). Aastatel 1976–1981 oli ta TRÜ matemaatikateaduskonna ühiskondlik prodekaan õppetöö alal. Tartu Ülikool tunnustas Aivo Parringut rektori tänukirjadega ja väikese medaliga.

Aivo Parringu uurimisvaldkonnaks diferentsiaalgeomeetrias oli seostuste teooria ja sümplektiline geomeetria. Ta uuris $2m$-mõõtmeliste sümplektiliste alamruumide parvi $2n$-mõõtmelises afiinsessümplektilises ruumis, vaadeldes neid parvi vektorkihtkondadena. Aivo Parring kasutas vektorkihtkonna siseseostuse kõverust ja väänet ülalpool mainitud $2m$-mõõtmeliste sümplektiliste alamruumide parve geomeetria uurimiseks ja ta tuletas selle parve struktuurivõrrandeid. Ta uuris diferentseeruvate muutkondade kõrgemat järku lineaarseostusi.

Aivo Parring õpetas põhiliselt geomeetriat, mille erinevaid kursusi ta luges kõigi aastate jooksul. Ta luges analüütilist geomeetriat, geomeetria aluseid, pseudoeukleidiliste ruumide teooriat, algebra ja geomeetria kursust ning projektiivset geomeetriat. Ta on koostanud veebikonspektid "Algebra ja geomeetria", "Geomeetria I", "Geomeetria II" ja need on üliõpilaste seas väga kõrgelt hinnatud.

Aivo Parring juhendas mitmeid lõputöid ja üliõpilaste sõnade järgi oli ta pühendunud juhendaja. Aivo Parringul oli hea huumorimeel, mis meeldis üliõpilastele ja kolleegidele. Prodekaani ametis oli ta täpne ja täpsust nõudev. Õppejõuna oli ta nõudlik ja õiglane. Ta pidas oluliseks oma sünnikodu, kodukohta ja sealseid kaaslasi, ta oli oluliseks toeks oma emale, kui sellel olid rasked ajad. Aivo Parring jääb kolleegide mällu, kui toetavalt abistav, lahkelt kogemusi jagav, igas olukorras rahu säilitav kolleeg.

Viktor Abramov
Tartu Ülikool

Veleida Tuutmaa

07.08.1932 – 10.08.2016

Kolm päeva pärast oma 84-ndat sünnipäeva suri sünnipäeva hommikupoolel kiirabiga haiglasse viidud Tallinna Tehnikaülikooli kauaaegne matemaatikaõppejõud Veleida Tuutmaa.

Veleida Tuutmaa sündis 7. augustil 1932. a. Läänemaal Taebla vallas Nõmme külas Rehe talus pere esimese lapsena. Hiljem sündis perre veel poeg. Rehe talu oli väike, ainult 13 ha, millest põldu oli vaid 3 ha. Hiljem ostis isa juurde looduslikku heinamaad ja haris sellest uudismaad. Kuna Rehe talu põld oli kõrge, kivine ja väheviljakas, siis ei piisanud saagist normaalseks äraelamiseks. Seetõttu pidi pereisa, kes oli tugeva kehaehitusega ning tehnikas ja käsitöös nutikas mees lisa teenima külasepana ja tisleritööga. Pere heaolu kestis kuni nõukogude võimu saabumiseni. 1945. a. juunis isa arreteeriti ja viidi Gulagi, kus ta 1947. a. suri Karaganda mammutvanglas tuberkuloosi.

V. Tuutmaa asus 1941. a. sügisel õppima Risti 4-klassilisse algkooli. Koolitee oli pikk (4,5 km). Seetõttu oli ta esimesel talvel Ristil tädi juures korteris. Järgmisel aastal läks ka vend kooli ning siis käidi juba iga päev 9 km. 1942. a. muudeti Risti algkool 6-klassiliseks kooliks ja 1947. a. mittetäielikuks keskkooliks. Risti kooli lõpetas V. Tuutmaa 1948. a. kiituskirjaga.

1948. a. sügisel asus V. Tuutmaa õppima Haapsalu 1. keskkooli 8. klassi. Ta oli ainuke maakoolist tulnud õpilane, kes lõpetas

8. klassi kiituskirjaga. Haapsalus õppides elas V. Tuutmaa kooli internaadis neljakesi toas. Sellest ajajärgust jäi alatiseks V. Tuutmaa mällu 1949. a. märtsiküüditamine. Kuna isa oli juba varem vangilaagrisse viidud, siis vastavalt nõukogude kommetele sattusid Tuutmaade pere ülejäänud liikmed küüditavate nimekirja. Veleida oli küüditamise päeval Haapsalus ja nägi raudteejaamas ja mujal linnas küüditamise praktilist kulgu. Hirmunult magas ta kooli internaadis öö voodi all, toakaaslased aga lubasid ütelda vajaduse korral, et ta pole maalt veel saabunud. Ent Tuutmaad siiski pääsesid lõpuks küüditamisest.

1952. a. kevadel lõpetas V. Tuutmaa Haapsalu 1.keskkooli ja asus sama aasta sügisel õppima Tartu Riikliku Ülikooli matemaatika-loodusteaduskonnas matemaatikat. Sisseastumiseksamitel saavutas ta 40 võimalikust 38 punkti. Tema kursusekaaslasteks olid ka hilisemad tuntud matemaatikud Ene-Margit Humal (nüüd Ene-Margit Tiit) ja Meiše Levin. Ülikoolis ei saanud V. Tuutmaa kaua õppida. Nagu kõik üliõpilased, pidi ka nende kursus minema sügistele põllutöödele kolhoosi. Kuna tal polnud pere vaesuse tõttu tööks sobivaid riideid ning elamis- ja töötingimused olid ääretult ebasoodsad, siis ta haigestus raskelt. V. Tuutmaa läks haigena end ravima ema juurde Nõmme külla. Pikaajalise ravi tõttu jäi ta õppetööst kõrvale ning ta loobus õpingutest Tartus.

1953. a. jaanuarist kuni 31. augustini töötas V. Tuutmaa algklassiõpetajana Ruila 7-klassilise kooli 3. ja 4. klassist koosnevas liitklassis. Lisaks õpetas ta 5. klassile bioloogiat ja 6. klassile zooloogiat. Ruilas töötades hakkas V. Tuutmaale meeldima õpetajaamet ja nii asuski ta 1953. a. sügisel õppima Tallinna E. Vilde nimelises Pedagoogilises Instituudis. Avalduse instituudis õppimiseks andis ta matemaatika erialale, kuid füüsikasse tahtjaid oli vähe ning need, kes füüsika sisseastumiseksami tegid viiele, pandi õppima füüsika erialale. Seejuures anti lubadus, et 2. kursuse lõpul saab üle minna matemaatika erialale. Kahe aasta pärast aga ei peetud lubadusest kinni ja nii lõpetaski V. Tuutmaa instituudi 1957. a. kevadel füüsikaõpetajana. Hiljem arvas ta, et see tuli talle isegi kasuks, sest ta teenis leiba nii füüsika- kui ka matemaatikaõpetajana.

Temaga ühes rühmas õppisid mitmed hiljem tuntuks saanud mehed ja naised: Aili Aben, Milvi Suurküla, Lembit Türnpuu, Heino Türkson, Rein Karemäe jt.

V. Tuutmaa suunati tööle Saaremaale Leisi keskkooli füüsika-, matemaatika- ja astronoomiaõpetajaks. Leisis töötada talle meeldis: kool asus ilusas kohas, klassid olid väiksed, õpilased õppisid hästi ning kaasõpetajad olid sõbralikud. Leisis töötas V. Tuutmaa viis aastat. 1962. a. sügisel asus ta tööle Harjumaale Nissi 8-klassilisse kooli, mis asus tema sünnikodule lähemal. Nissis töötas V. Tuutmaa kuus aastat füüsika-, matemaatika- ja keemiaõpetajana. Nissis töötamise ajal tegeles ta palju klassivälise tööga. Ta korraldas ülekoolilisi keemiaõhtuid ja igal aastal aprilli algul kosmonautikapäeva tähistamist. Nendel üritustel esinesid nii õpilased kui ka V. Tuutmaa ise.

1968. a. juulis astus Veleida Tuutmaa esimest korda üle TPI läve sooviga saada matemaatika kateedri laborandiks. Matemaatika kateedrit juhatas siis akadeemik Arnold Humal. Humalaga kohtumist meenutas V. Tuutmaa hiljem järgmiselt: *Ta oli sel päeval kateedris ja ütles mulle, et tal olevat üks huvitav matemaatikaülesanne, kas ma ei aitaks tal see ära lahendada. Ütlesin, et ma olen kõik valemid unustanud ja vaevalt ma saan teda aidata. Ta ütles, et sellest polevat midagi, ta ütlevat mulle vajalikud valemid ette. Istusime laua äärde ja mina hakkasin tema poolt dikteeritud ülesannet lahendama. Ülesanne oli tal peas. Lahendasime umbes tund aega, siis oli see töö valmis. Pärast seda ütles ta, et tulgu ma talle assistendiks, kuid tingimusel, et külastan kõiki tema loenguid ja harjutustunde. Seda ma ka tegin. Need konspektid on mul praegugi veel alles. See oli väga põnev ja tore periood minu elus. Tegin tööd rõõmu ja entusiasmiga. Üsna varsti võitsin tudengite lugupidamise. Üliõpilaste õpetamine mulle meeldis ja meeldib praegugi. Professor Humalale võlgnen suure tänu, et ta mind, 8-klassilise kooli õpetajat, võttis tööle ja veel oma assistendiks. Professor Humalaga koostöötamisel õppisin palju matemaatikatarkusi ja tema suurepärast metoodikat.*

Nii saigi V. Tuutmaast 1. septembrist 1968. a. TPI matemaatika kateedri assistent, täpsemalt akadeemik A. Humala assistent.

Tallinna Tehnikaülikoolis töötas V. Tuutmaa ühtekokku 30 aastat, s.o. 30. augustini 1998. a. Siis siirdus ta pensionile. Aastail 1968–1986 oli ta assistent, 1986–1992 vanemõpetaja ning 1992–1998 lektor. V. Tuutmaa tegi õppetööd suure armastuse ja hoolega. Ta pühendas palju õppetööväliseid lisatunde konsultatsioonide andmiseks üliõpilastele. Võib isegi öelda, et paljud laisad üliõpilased kuritarvitasid tema vastutulelikkust. Ka hiljem, pensionil olles, aitas ta hädalisi üliõpilasi eksamiteks ettevalmistamisel. Vahetevahel ta ütles: *Olete siin küll kõrgelt haritud professorid, aga õpetada te ei oska; ikka pean mina üle õpetama.* Ja, tõepoolest, kui V. Tuutmaa oli *üle õpetanud*, siis ka üliõpilane reeglina sooritas eksami vähemalt hindele "1".

Ülikooli õppejõuna töötades täiendas V. Tuutmaa pidevalt oma teadmisi matemaatikast. Ta võttis osa matemaatika kateedri õppejõudude seminarist. Ka seal konspekteeris ta ettekandeid ja püüdis nendest aru saada. Abstraktsemad teemad talle siiski ei meeldinud.

Abiellunud V. Tuutmaa ei olnud. Tema tähelepanu oli suunatud õpetamisele ja kuni ema surmani ema abistamisele ning hooldamisele. Ta hoolitses oma sünnitalu korrashoiu eest. Igal suvel käis ta koos sõpradega turismireisil. Aeg-ajalt käis ta ka kirikus. Ta võttis võimaluse korral osa matemaatikainstituudi ja Eesti Matemaatika Seltsi üritustest.

Endistele kolleegidele, sõpradele ja paljudele õpilastele ning üliõpilastele jääb Veleida Tuutmaast mälestus kui erakordselt abivalmis ning heast inimesest.

Peeter Puusemp
Tallinna Tehnikaülikool

KOOLIMATEMAATIKA

Eesti koolimatemaatikud Gruusias kogemuste andja rollis

Gruusias käinute muljed kogus kokku Anne Aasamets.

21. oktoobril 2016 kogunes seltskond matemaatikuid Tallinna Lennujaama, et sõita Gruusia Haridusministeeriumi kutsel Tbilisi. 25-liikmelisse seltskonda kuulusid matemaatikaõpetajad erinevatest Eesti koolidest, õppejõud Tartu ja Tallinna Ülikoolist, metoodikud Tartu Ülikooli Teaduskoolist ja Haridus- ja Teadusministeeriumist.

Meie eesmärgiks oli tutvustada Eesti matemaatikaharidust ja edusamme PISA tulemuste foonil. Sõitu finantseeris Eesti Haridus- ja Teadusministeerium.

Teel seminarile. Foto: Imbi Henno.

Koostöös Gruusia kolleegidega kokku pandud kahepäevase seminari kava oli väga mitmekülgne. Meie ettekanded andsid ülevaate Eesti matemaatikaõpetuse ajaloost, praeguse õppekava põhieesmärkidest ja nende saavutamise teedest, õpetajate kaasamisest õppekava arendamisse (lõiming, õppekirjandus, lisamaterjalid, uurimistöö jne), klassi- ja koolivälisest tööst õpilastega, erinevatest IKT rakendustest matemaatikatunnis, õppekirjandusest, riiklike tasemetööde süsteemist ja PISA-testide tulemustest, matemaatikaõpetajate ettevalmistamisest ja täiendkoolitusest, samuti matemaatikaõpetajate igapäevatööst, ühistest ettevõtmistest ja EMS Koolimatemaatika Ühenduse tegemistest. Seminari töökeelteks olid vene ja inglise keel.

Külakostiks võtsime kaasa Eestist matemaatikaõpikute venekeelsete versioonide täieliku komplekti, mille panime kokku erinevate kirjastuste õpikutest.

Meid võõrustas Tbilisis asuv Ilia Riiklik Ülikool (*Ilia State University*), mis on asutatud 2006. aastal. Lisaks seminari ettekannetele kuulasime vastuvõtjaid, kes rääkisid oma riigi matemaatikahariduse hetkeseisust.

Presiidiumilaua taga istuvad Imbi Henno Eesti HM-st ja Natia Jokhadze Gruusia HM-st, meie võõrustaja Ekaterine Kordzadze ja ülikooli õppejõud Irina Rukhadze. Foto: Raili Vilt.

Gruusia kolleegide ettekannetest selgusid nende koolimatemaatika mitmed probleemid. Koos piiride avanemisega lahkusid paljud nimekad matemaatikud laia maailma. Ka neid kummitab tippude lahkumine, kuid nad on selle üle ikka uhked ka. Koolimatemaatikaga tegelejaid on alles väga vähe.

Räägib guru. Professor ja õpikute kirjutaja TORNIKE KADEISHVILI. Meile tema mõtted meeldisid. Foto: RAILI VILT.

Matemaatika süvaõpet annavad Gruusias ainult kolm reaalkallakuga kooli, kus õpib ligikaudu 3000 õpilast: Komarovi nimeline internaatkool nr 199, I. Vekua nimeline füüsika-matemaatika kool nr 42 ja A. Razmadze nimeline füüsika-matemaatika kool nr 41. Need kolm kooli on koos progümnaasiumitega, seega võetakse õpilased katsetega 7. klassi ja üldjuhul lõpetavad noored ka selle kooli. Gruusias on neid kolme kooli suudetud hoida väga heal tasemel läbi aegade. Kõik Gruusiasse toodud võidud rahvusvahelistelt olümpiaadidelt jagunevad ainult nende kolme kooli vahel. Tegelikult toimubki kogu olümpiaaditöö vaid neis koolides ning mingit üleriigilist matemaatikaolümpiaadi (nagu meil Eestis) seal ei toimu. Laupäeviti töötab nende koolide juures ettevalmistuskool 5. ja 6. klassis õppivatele lastele. Grusiinidel on olnud soov teha igasse piirkonda selline matemaatika süvaõpet andev kool, aga seni ei ole see õnnestunud. Tavakoolide tase matemaatikaõpetuse alal on väga ebaühtlane. Kutseharidust loevad nad ise väga kehval tasemel olevaks, aga sellest me eriti palju ei kuulnud.

Näide jäägiga ja jäägita jagamisest rõngikute abil.
Foto: KRISTEL TAMM.

Õpilased lähevad Gruusias kooli kuueselt. Kool lõpeb 12. klassiga. Hindamine toimub 10-palli süsteemis. Grusiinid olid meeldivalt üllatunud, et meil veel on võimalik eksamil või tasemetöös lahendada ülesandeid ja esitada lahendusi. Nende lõpueksam matemaatikas kujutab endast valikvastustega elektroonilist testi. Ise nad ei pea seda parimaks variandiks, sest üsna suur võimalus on ka mitteteadjal õigele vastusele juhuslikult pihta saada, kuid samas kaotab selline eksam korruptsiooni. Isegi niisuguse eksami korral kukub umbes 25% õpilastest läbi.

Ülikooli astumise lävend on 25% (Eestis 75%). Praktiliselt on neil ülikoolides kokku õppekohti rohkem, kui neil lõpetajaid vastaval aastal oleks – seega kui tahta, siis mingile erialale saaksid kõik minna.

Gruusia kolleegide huvi Eesti matemaatikahariduse sisu ja korralduse vastu on kindlasti põhjustatud ka PISA-tulemustest. Kui viimases PISA-testis saavutas Eesti 520 punktiga kõigi osalenute hulgas 9. ja Euroopa riikide hulgas koos Šveitsiga 1.–2. koha siis Gruusia tulemused leiame tabeli allosast. Gruusia saavutas

70 osalenud riigi hulgas 404 punktiga 57. koha (eelmises testis 2012. aastal oli neil 379 punkti). Hinnanguliselt tähendab PISA kontekstis 40 punkti ühte õppeaastat. Seega viitab Eesti ja Gruusia õpilaste keskmiste tulemuste võrdlus asjaolule, et Gruusia 15-aastased õpilased on saavutanud keskmiselt taseme, mis vastab ca kolm aastat nooremate õpilaste tasemele Eestis.

Kõnekas on ka Gruusia õpilaste testitulemuste jaotus PISAs kasutatud kuuel saavutustasemel. Selgub, et ligi 30% nende õpilastest saavutas matemaatikas vaid kõige madalama saavutustaseme. Sellest võib teha järelduse, et Gruusia kool ei hoolitse piisavalt matemaatikas vähemvõimekate õpilaste eest. Kui Eestis jõudis PISA uuringus nn baastasemele 88,8%, siis Gruusias oli selliste õpilaste osakaal vaid 42,9% !!!

Suhteliselt kehvad tulemused peegeldavad loomulikult Gruusia koolide ja õpetajate taseme suurt ebaühtlust. Kindlasti räägivad need aga ka sellest, et nende koolimatemaatika eesmärgid ja sisu ei pruugi olla kuigi heas kooskõlas PISA arusaamadega.

Meelde jäi grusiinide väga positiivne suhtumine sõjapõgenikesse ja teistesse sisserändajatesse. Nende jaoks töötatakse välja praegu uusi õppematerjale. Selle teemaga tegeles meie suurepärane vastuvõtja EKATERINE KORDZADZE.

Gruusias kasutati läbi kogu Nõukogude-perioodi vene tõlkeõpikuid ja sama traditsioon jätkub tänaseni. Seetõttu oli Gruusia kolleegidel ka väga suur huvi eesti matemaatikaõpikute vastu. Eesti matemaatikahariduse suureks plussiks tuleb lugeda just vene tõlkeõpikute mitte kasutamist ja oma metoodikute poolt kirjutatud heade õpikute järjepidevust.

Meie mõistes vanemõpetajaid on Gruusias vähe (19%). Et saada vanemõpetajaks, millega kaasneb umbes veerandi võrra kõrgem palk, tuleb sooritada eksam (vabatahtlik).

Matemaatikaõpetajate eksam (test) sisaldab 50% ulatuses meie mõistes I ja II kooliastme ja 50% ulatuses III ja IV kooliastme ülesandeid ja probleemide lahendamist.

Eksam loetakse sooritatuks 53% korral ja seda saab sooritada 3 korda aastas.

Need õpetajad, kellel test ebaõnnestus, jätkavad ikka töötamist ja samas ei garanteeri töökohta ka testi edukas sooritamine. Õpetajate palgad ei ole kõrged ja seetõttu hindavad nad kõrgelt kõiki soodustusi, näiteks linnatranspordi soodustust.

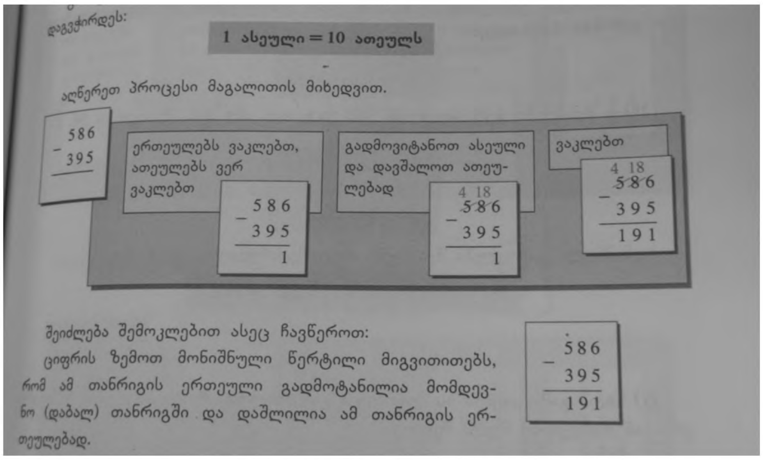
Mõned näited matemaatika testist:

1) Kaupluses on pirnid virsikutest 20% odavamad ja ploomid pirnidest 50% odavamad. Mitu protsenti on ploomid virsikutest odavamad?

2) Jalgrattur väljus punktist A ja saabus punkti B ettenähtud ajal. Kui ta sõidaks kiirusega 9 km/h, siis jõuaks punkti B 20 minutit hiljem, ja kui ta sõidaks kiirusega 12 km/h, siis jõuaks punkti B 30 minutit varem. Leia jalgratturi keskmine liikumise kiirus.

3) 94 cm pikkune lõik on jaotatud osadeks, mis on pöördvõrdelised arvudele 3, 4 ja 5. Leia nende seast suurima pikkusega lõik.

4) Leidke koordinaatteljestikus punktile $A(2, 3)$ sümmeetriline punkt sirge $y = x - 4$ suhtes. Kirjeldage lahendust õpilasele arusaadavalt.



Näide õpikust: naturaalarvude lahutamine.
Foto: Anne Aasamets.

Nägime, et mõlemal maal on oma väljakujunenud õpetamise traditsioonid. Gruusia kolleegide ettekanded olid suunatud eeskätt matemaatikas andekate õpilaste arendamise küsimustele (vähemalt jäi selline mulje, sest esinejad olid vaid kolmest reaalkoolist). Meie riigi hariduspoliitika on seadnud aga eesmärgiks selle, et kõik õpilased saaksid võimalikult hea hariduse. Ega me selles küsimuses ühist keelt ei leidnudki. On teada, et muutused ühiskonna ja õpetajate arusaamades sellest, milline peaks hea haridus olema, on suhteliselt püsivad ja ei muutu kiiresti.

Vene–Gruusia konflikt on toonud endaga kaasa ulatusliku sisepõgenikelaine, seda lisaks varasematele põgenikele Abhaasiast ja Lõuna–Osseetiast. Gruusias on üle saja tuhande inimese sunnitud oma kodudest lahkuma. Meil oli võimalik külastada Gruusia suurimat sisepõgenike küla Tserovanit ja sealset kooli. Küla asub 20-minutilise bussisõidu kaugusel Tbilisist. Külla ehitati 2008. aasta lõpuks eluasemed 2200 perele. Kõik nähtud majad olid ühesugused pisikesed ja punaste katustega. Tänavad on nöörsirged ja asula peaväljakul paiknevad kool ning lasteaed.

Tserovani koolimaja. Foto: IMBI HENNO.

Koolis võtsid meid soojalt vastu kooli direktor ja õppealajuhataja ning kohe mainiti ka ära, et nende koolis on pooled õpetajad sertifikaadiga õpetajad. Tegime lühikese ringkäigu majas. Nägime kõledaid koridore ja nigelat koolivõimlat. Meile näidati arvutifirmalt kingituseks saadud ülimoodsat meediaklassi, mis ei leia väga laialdast kasutust, kuna sinna ei mahu kogu klass korraga tundi. Piilusime ka mõne klassi ukse vahelt sisse. Igast klassist vaatas meile vastu ligi 30 uudishimulikku ja rõõmsameelset õpilast. Erinevalt meie lastest suhtlesid nad omavahel ka vahetunnis aktiivselt, nutitelefone me ei märganud.

Tserovani kool: lapsed tunnis. Nad harjutasid just gruusia rahvalaulu mida lauldakse äsjasünnitanud emale.

Foto: Anne Aasamets.

Raamatukogus tutvusime koolis kasutusel olevate õpikutega, eriti huvitasid meid muidugi matemaatikaõpikud. Uurisime huviga nende sisu ja arutasime metoodika üle. Numbritest ja piltidest saime aru, mis teemaga tegeletakse aga tekstist küll aru ei suutnud saada, kuna gruusia kirjapilt erineb väga palju meile harjumispärasest, ka lauset ei alusta nad suure tähega vaid kirjutavad kõik tähed võrdse kõrgusega. Meie külaskäigu väärtust näitas samaks ajaks kooli tulnud nende Haridusministeeriumi esindaja Natia Jokhadze. Eriti rõõmus oli külalise üle kooli õppealajuhataja, kes sai kohe oma kooli probleemidest temaga rääkida.

Arvutitund Tserovani koolis. Foto: IMBI HENNO

Lisaks seminarile püüdsime pilku heita ka Tbilisi linnale ja selle ümbrusele.

Gruusia on imeilus maa. Suured mäed on Eestist tulnuid alati paelunud. Kristlust oli näha ja tunda ja seda näidati uhkusega külalistele. Usul on seal väga suur tähtsus ning nägime palju vanu kloostreid ja kirikuid. Nad on väga uhked oma ajaloo üle. Giid Marika rääkis meile väga palju Gruusia kuulsusrikkast ajaloost ja sealsetest sakraalehitistest. Samas ei peatunud ta eriti viimase saja aasta ajalool ehk nõukogude perioodil.

Vaade Mtshketa kiriku juurest: Kohtuvad Ura ja Aragvi jõgi.
Foto: ANNE AASAMETS.

Tbilisis meenus elu Eestis 15 aastat tagasi. Palju väikseid poode ja aktiivseid kaupmehi. Mitmed poed olid lahti 24h. Kõrvuti seisid uhked uusehitised ja täiesti vaevu püsti seisvad majad, milles siiski elati. Tänavatel hakkasid silma kerjused. Üllatas tohutult aktiivne liiklus. Autoteel sõitis kõrvuti täpselt nii palju autosid, kui palju sinna mahtus. Sõidurajad ei kehtinud. Liiklus on tohutult lärmakas – signaali anti nii hoiatamiseks, tervitamiseks kui lihtsalt suhtlemiseks. Palju sõitis tänavatel ringi parempoolse rooliga autosid. Ka kõnniteel pidid olema ettevaatlik, sest sealne pind sobis väga hästi autodele parkimiseks.

Saime ülevaate Gruusia traditsioonilisest ja ka moodsamast veini tootmisest ning nende toidukultuurist.

Seminari lõpupilt. Foto: RAILI VILT.

Grusiinid olid väga külalislahked ja abivalmid. Eriti soe suhtumine pidi neil olema eestlastesse, nad ei unusta president T.H. ILVESE külaskäiku ja toetust neile. Gruusias võid julgelt olla eestlane. Loodame koostöö jätkumisele.

(Artikkel ilmus Õpetajate Lehes 23. veebruaril 2017.)

Eesti Matemaatika Selts ja Koolimatemaatika Ühendus

Hele Kiisel
Hugo Treffneri Gümnaasium

Eesti Matemaatika Seltsi eelkäijaks loetakse 23. veebruaril 1926. aastal asutatud Akadeemilist Matemaatika Seltsi. Aastatel 1941–1987 selts aktiivselt ei tegutsenud. Selts alustas taas tegevust 17. septembril 1987. a. Eesti Matemaatika Seltsina (EMS). EMS on mittetulundusühing ja registreeritud Tartus.

Seltsi liikmeteks on kõrgkoolide õppejõud, õpetajad ja matemaatika õpetamise arengust huvitatud inimesed (mõned isegi välisriikidest).

EMS-i eesmärgid on:

- soodustada matemaatika-alast uurimistööd;
- aidata kaasa matemaatika ja matemaatiliste meetodite rakenduste levikule;
- vahendada matemaatikas teadusgrante;
- hoolitseda matemaatilise hariduse eest nii üldharidus-, kutseharidus- kui ka kõrgkoolis;
- teha koostööd teiste matemaatikaseltsidega ja teistel teadusaladel tegutsevate seltsidega nii Eesti Vabariigis kui ka rahvusvahelises ulatuses;
- edastada oma liikmetele matemaatika-alast informatsiooni.

Nende ülesannete täitmiseks selts:

- organiseerib matemaatika ja selle rakenduste alaseid konverentse, nõupidamisi, täienduskursusi;
- korraldab teaduslikke, didaktilisi ja ajaloo-alaseid seminare;

- taotleb teaduskomandeeringuid ja edastab informatsiooni konverentsidest;
- korraldab avalikke konkursse erinevates valdkondades, mille alusel määrab preemiaid ja stipendiume (*näiteks Arnold Humala preemia, üliõpilaspreemia, publikatsiooniauhind, Gerhard Rägo medal jne*);
- autasustab silmapaistvaid teadustulemusi saavutanud matemaatikuid, esitab eesti matemaatikuid ja matemaatikaõpetajaid üleriigilistele ja rahvusvahelistele konkurssidele ja preemiatele (*näiteks Vabariigi Presidendi reaalteaduste eripreemiale*);
- osaleb matemaatika-alase teadusliku, didaktilise ja populaarteadusliku kirjanduse väljaandmisel ja kirjastusplaanide aruteludel ning käsikirjade retsenseerimisel;
- annab välja aastaraamatuid ja muid trükiseid (*kogumik "Koolimatemaatika"*);
- osutab abi õppuritele orienteeritud matemaatika-alaste konkursside organiseerimisel ning toetab teisi töövorme, mille eesmärgiks on noorte matemaatika-alaste teadmiste taseme tõstmine (*näiteks vabariiklik matemaatikaolümpiaad ja lahtised võistlused*);
- aitab kaasa matemaatika ja selle rakenduste tutvustamisele ajakirjanduse, televisiooni, raadio, elektronside jm kaudu (*avalikud kirjad seoses koolimatemaatikaga*);
- koondab oma kogudesse matemaatilist kirjandust ja teadusalast informatsiooni, eeskätt vahetuste ja annetuste teel;
- loob vajaduse korral erialasektsioone, komisjone ja töörühmi seltsi ees seisvate ülesannete lahendamiseks (*näiteks Koolimatemaatika Ühendus*);

- erialasektsioonidel on konkreetsed eesmärgid ja ülesanded, mis fikseeritakse põhikirja lisas.

EMS-i tööd juhib seltsi president, kelleks on hetkel Tartu Ülikooli algebra professor Valdis Laan, ja 10-liikmeline juhatus, kuhu kuulub ka KMÜ esimees.

Koolimatemaatika Ühendus (KMÜ) loodi 1989. a. jaanuaris Eesti Matemaatika Seltsi sektsioonina. KMÜ lähtub oma tegevuses EMS-i põhikirjast, kuid peamiseks eesmärgiks on koolimatemaatika ja matemaatilise hariduse areng Eesti Vabariigis.

KMÜ ülesanneteks on:

- luua võimalused ja aidata kaasa oma liikmete erialase kvalifikatsiooni tõstmisele;
- edendada liikmete kutsealast tegevust;
- kaitsta liikmete ühiskondlikke ja kutsealaseid huve;
- aidata kaasa koolimatemaatika arengule, matemaatiliste teadmiste levitamisele;
- hoolitseda matemaatilise hariduse eest nii üldharidus-, kutseharidus- kui ka kõrgkoolis;
- teha koostööd EMS-i ja teiste õpetajate ühendustega Eesti Vabariigis ja rahvusvahelises ulatuses;
- edastada oma liikmetele haridusalast informatsiooni.

Nende ülesannete täitmiseks KMÜ

- organiseerib konverentse, nõupidamisi, täienduskursusi matemaatika ja selle õpetamise ning rakendamise osas;
- osaleb matemaatika-alase teadusliku, didaktilise ja populaarteadusliku materjali väljaandmisel;
- osaleb haridusuuringutes;

- osutab abi matemaatika-alaste konkursside organiseerimisel ja läbiviimisel õpilastele ning toetab teisi töövorme, mille ülesandeks on noorte matemaatiliste teadmiste taseme tõstmine (*olümpiaadid, võistlused, Nuputa, Känguru jne*);

- loob vajadusel komisjone ja töörühmi ühenduse ees seisvate ülesannete lahendamiseks ning hariduspoliitika kujundamiseks (*õppekava ja ainekava loomine ning pidev arendamine, õppematerjalide kaardistamine, eksamite ja tasemetööde arendamine jne*);

- saadab oma esindajad üleriigilistesse organisatsioonidesse ja komisjonidesse (*koostöökoda, atesteerimiskomisjon jne*);

- tunnustab matemaatikaõpetajate saavutusi (*Rägo medal, aasta õpetaja jne*).

KMÜ tööd juhib 8–10 liikmeline juhatus eesotsas juhatuse esimehega.

KMÜ juhatus valitakse 3 aastaks EMS üldkoosolekul ja juhatus valib enda hulgast esimehe. 2014. aastal valitud juhatusse kuulusid MARE VAHTRAMÄE Tapa Gümnaasiumist, HELEN KAASIK Tallinna Reaalkoolist, RAILI VILT TÜ Teaduskoolist, INNA TOOVIS Toila Gümnaasiumist, ESTA ERIT Õismäe Gümnaasiumist, MARGIT NUIJA Viljandi Gümnaasiumist, URVE PÄRNAMAA Käina Koolist, TIIU KALJAS Tallinna Ülikoolist, ANNE AASAMETS Kilingi-Nõmme Gümnaasiumist ja esimeheks valitud HELE KIISEL Hugo Treffneri Gümnaasiumist. Uued juhatuse valimised toimusid EMS-i aastakoosolekul 2017. a. märtsis Tartus.

Matemaatikaõpetajate võrgustiku töö parendamiseks kutsuti 2007. a. septembris kokku nn. matemaatikaõpetajate aktiiv, kuhu kuuluvad KMÜ juhatuse liikmed ja maakondade ainesektsioonide esimehed. Koos käiakse 1–2 korda aastas Tartus, Tallinnas või mujal, mõnikord ka suuremate ürituste osana (näiteks KMÜ suvepäevadel). Aktiivi koosolekutel planeeritakse õppeaasta suuremad üritused (olümpiaadid, võistlused, koolituspäevad), jaotatakse ülesandeid, vahetatakse kõiksugu infot, räägitakse täiendkoolituste teemadest nii maakonna kui vabariiklikul tasemel. Oluline koht on olnud tasemetööde ja eksamitega seonduval infol, omaaegse Tiigrihüppe koolituste tutvustamisel ja koolituse maakondadesse tellimise võimalusel, kõrgkoolide poolt pakutavate koolituste tutvustamisel jne. Aktiivi ettepanekul on hakatud ühiselt tellima ülesandeid nende võistluste jaoks, mis pole Teaduskooli võistluste kalendris (matemaatikaolümpiaad 4.–6.klassi õpilastele, NUPUTA eelvoor) ning võetud ainesektsioonide vedada NUPUTA vabariikliku vooru (nüüd juba vabariiklike võistluste kalendris) läbiviimise. Aktiivi korraldada on ka kogemuste vahetamine kolleegidega teistest riikidest.

Nüüd natuke konkreetsemalt meie tegemistest eelmise õppeaasta (2015/2016) näitel.

Õpilastele mõeldud üritused on ühelt poolt traditsioonilised ja teiselt poolt TÜ Teaduskooli korraldatud, kuid puudutavad õpetajaid, seega ka KMÜ-d, alati.

Esimesel poolaastal olid kaks lahtist võistlust (26.09 ja 13.12), milleks paljud koolid ka õpilasi ette valmistasid. Sellesse perioodi jäid ka kooliolümpiaadid ja palju koolidevahelisi võistlusi (viie kooli võistlus, kolme kooli kohtumine, matemaatikalaagrid jne.). Õpetajad treenisid õpilasi ja hindasid võistlustöid. Vabariikliku matemaatikaolümpiaadi piirkonnavoor toimus 30.01 ja pooled maakondadest viisid sel ajal läbi ka 4.–6. klassi (nn. väikeste) olümpiaadi. Veebruaris (17.02) toimus ühiselt tellitud ülesannetega NUPUTA eelvoor maakondades. Märtsis toimub 4.–6.klassi olümpiaad maakondades, kus seda koos piirkonnavooruga ei tehtud. Ka selle võistluse jaoks tellis KMÜ ühised ülesanded. Märtsis toimus rahvusvaheline võistlus Känguru (17.03). Nüüd oli kõigi klasside õpilastel võimalus võistlusel osaleda ja head meelt teeb osalejate arvu kasv. Arvan, et paljudes koolides lahendatakse eelnevalt (st. harjutamiseks) eelmiste võistluste ülesandeid. Ja juba lähenes kooliaasta lõpp: olümpiaadi lõppvoor (02.–03.04), mis puudutab juba väiksemat arvu õpilasi; Nuputa lõppvoor (23.04) Rapla Ühisgümnaasiumis, kuhu saavad sõita vaid maakondade parimad; tasemetööd ja eksamid (mai/juuni), mis paraku puudutavad jälle suurt arvu õpilasi ja õpetajaid. Matemaatika- ja eesti keele õpetajad on need õnnetud, kes iga kooliastme lõpus peavad õpilastega koos tõestama, et on ikka veel heal tasemel. Sain kokku 8 võistlust, tasemetöö 6. klassis ja eksamid põhikooli ning gümnaasiumi lõpus. Unustasin sisseastumiskatsed gümnaasiumisse, milleks tuleb samuti eraldi tööd teha. Matemaatikaõpetajad vist infarkti ei sure, sest pingelangust ei saagi lubada. Ka riigieksami tööde hindajatest moodustavad suurema osa aktiivsed tegevõpetajad.

Eespool loetletud üritustel oli õpetaja korraldaja ja enamasti andja rollis. Õpetajal on tarvis uusi ideid ja kogemusi. Sellele mõtlesime augusti lõpus Palamusel toimunud KMÜ suvepäevadel (2015. a. aug.), kui aktiiviga aastaplaani koostasime.

Koolituspäevadel Tallinna Reaalkoolis (22.10) ja Tartus Hugo Treffneri Gümnaasiumis (31.10) rääkisime pikalt tasemetöödest ja eksamitest ning andsime soovitusi õpilaste eksamiteks ettevalmistamisest. Samuti tutvustasime õppekava arenduse käigus valminud õppeprotsessi kirjeldust ning jagasime infot järgmiste ürituste osas.

42. korda toimusid Eesti matemaatikaõpetajate päevad, seekord 13.–14.novembril Viimsis. Ettekannete kogumiku Koolimatemaatika väljaandmises osales Eesti Matemaatika Selts. Ettekannete tematika oli lai – huvitavatest arvudest kuni uute õpetamismetoodikateni välja. Märtsis (12.03) toimus seltsi aastakoosolek Tallinna Tehnikaülikoolis. Sel korral oli lisaks aastakoosoleku traditsioonilistele aruannetele ja kokkuvõtetele palju huvitavaid ettekandeid. Päev lõppes TTÜ innovatsiooni- ja ettevõtluskeskuse Mektory külastamisega. Osalejad, keda oli küll vähe, jäid päevaga väga rahule.

26.–28. juunil toimusid XV Eesti Matemaatika päevad Luhtres (Rapla maakonnas, ajaloolisel Läänemaal). Kahjuks osales sel korral väga vähe õpetajaid. Tundub, et õpetajad on juuni lõpuks nii väsinud, et ei suuda koolitustele mõeldagi, ja lisaks oli üritus sel korral ka päris kallis. Koolidel on koolitusrahadega väga kitsas. EMS-i poolt kutsutud esinejad olid aga väga head – MARIS LAURI, TARMO SOOMERE, ANDI KIVINUKK jne. Räägiti matemaatika saatusest uuenduste keerises nii ülikoolides kui koolis ja uutest võimalustest matemaatika õpetamisel (Kristel Mikkor, Terje Hõim, Tiia Rüütmann).

Õppekava arendamise käigus valmisid õppeprotsessi kirjeldused. See oli väga töömahukas protsess, kus osales ligi 20 õpetajat ja head nõuandjat, kuid nüüd on hea materjal kõigile kasutamiseks saadaval aadressil
http://oppekava.innove.ee/oppeprotsesside-kirjeldused/matemaatika-oppeprotsessid/ .

Meie kolleegid osalesid õppematerjalide kaardistamisel ja esitasid ülevaate hetkeseisust. Pärast seda toimusid arutelud ainevaldkondade kaupa edasiste tegevuste osas. Otsustasime välja kuulutada konkursi e-õppematerjalide loomiseks kolmel teemal.

Koolimatemaatika Ühendus teeb koostööd Tartu Ülikooliga, Tallinna Ülikooliga ja Tallinna Tehnikaülikooliga nii õpetajate kui õpilaste koolitamise osas (teaduskool, õpilasakadeemia, Mektory). Oleme õnnelikud, et meie seltsi kuuluvad nii õpetajad kui õppejõud – koolitajad omast käest võtta.

Hea koostöö on meil olnud ka AS Innovega. Me kõik mäletame, kui vaevaliselt toimus uuele eksamivormile üleminek emakeeles. Matemaatikutel suuri lahinguid ei olnud. Oleme toimetanud rahulikult ja jaganud infot kolleegidega õppe-ja ainekava koostamisel, õppeprotsesside kirjelduste tegemisel ja ka riigieksami vormi muutmisel.

KMÜ kuulub Õpetajate Ühenduste Koostöökotta ning selle kaudu teeme koostööd teiste ainete õpetajatega. Juhatuse liikmed on osalenud aineühenduste juhtide teabepäevadel ning tutvustanud seal meie tegemisi.

KMÜ eestvedamisel oleme tutvunud kolleegide tegemistega Lätis, Leedus, Soomes ja Sankt–Peterburgis. Oleme tutvustanud oma tegemisi õpetajate Uudiskirjas.

Eelmisel õppeaastal ilmus vabariiklikes ajalehtedes mitmeid matemaatikaõpetajaid puudutavaid artikleid Mari–Liis Pintsoni ja Allar Veelmaa sulest. Praegu hoiab kirgi üleval 6. klassi tasemetöö oma e-versiooniga.

EMS Koolimatemaatika Ühenduse eestvedamisel on korraldatud õppekava tutvustav koolitustuur, mis läbis kõiki maakondi. Analoogselt toimisime ka enne PISA uuringut. Need ja palju teisi koolitusi on saanud teoks vaid tänu projektidega rahastuse taotlemisele. Taotlust saab esitada organisatsioon – Eesti Matemaatika Selts. Ja nagu eelnevast jutust selgub – mitte midagi ei toimu ilma EMS Koolimatemaatika Ühenduseta, sest aktiivsed õpetajad kuuluvad just sellesse organisatsiooni.

Head kolleegid! Astuge Eesti Matemaatika Seltsi!

(Artikkel põhineb 43. matemaatikaõpetajate päevadel Raplas peetud ettekandel.)

Matemaatikaõpetajate avalik kiri

Eesti matemaatika seltsi koolimatemaatika ühendus arutas oma aktiivi teabepäeval 10. septembril 2016 Tartus Õpetajate Lehes ilmunud artikleid "Kui õnnetus hüüab tulles" ja "E-hindamine tuli selleks, et jääda".

Matemaatikaõpetajad leidsid järgmist.

- Eksamite infosüsteem EIS ei sobi praeguses versioonis (lähtume 6. kl tasemetöö toimumise ajast) matemaatika tasemetöö ja eksami korraldamiseks. See sobib vaid arvuti kasutamise harjutamiseks.
- Praegu pärsib EIS matemaatikas loovat mõtlemist. Matemaatikas tähendab loov mõtlemine erinevaid lahendusviise ja see on ka kehtiva õppe- ja ainekava prioriteet.
- Tasemetöö eel pole peaaegu võimalust harjutada. Tuttavad on vaid kahe eelmise aasta testid, mille tehniline teostus on erinev.
- Matemaatika tasemetöös peab rõhk olema ainekavas ettenähtud oskuste ja teadmiste kontrollil, mitte juhiste lugemisel. Digipädevust, infootsingu oskust jms matemaatika tasemetöö ei kontrolli. Neid oskusi saab kontrollida näiteks nutispordi ja teiste ainete testidega.
- Oleme nõus, et tasemetöö üks osa on põhiteadmiste test, mis viiakse läbi elektrooniliselt. Seda saab EIS-i praeguses versioonis teha. Tasemetöö teine osa (ülesannete lahendamine) peab toimuma paberil. Tuleb tunnistada, et matemaatika on eriline aine, sest tal on oma keel (sümboolika) ja ta kasutab lisaks jooniseid ning graafikuid.
- 2017. aastal ootavad õpetajad valikuvõimalust: kas teha tasemetöö paberil või arvutis.
- Hindamine peab olema korrektne. Meie arvates e-versioonis seda käsitsi teha ei saa.

- Välistame põhikoolieksami arvutis (põhiteadmiste testi mitte).
- Õpilaste traumeerimine tuleb lõpetada. Õpilased läksid endast välja, kui ei saanud juhistest ja vormistamisnõuetest aru. Eelmise tasemetöö läbitegemine neid ei aidanud, sest selle tehniline vormistus oli teistsugune ning õpetaja oli teema õpetamisel kasutanud teist algoritmi.
- Koolide tehniline baas on nõrk ning internetiühendus aeglane.
- Artiklis märgiti, et sel kevadel kasutati e-tasemetöö varianti rohkem kui varasematel aastatel, aga jäeti lisamata, et valikuvõimalust polnudki.
- Lapsevanemad nõuavad oma lastelt head tulemust, kuid taoliste eksperimentidega ei pruugi see tulla. Kes on süüdi? Ikka õpetaja.
- Oleme kõigis töörühmades, mis on e-tasemetöö ja e-ülesannete probleemiga tegelnud, toonud välja põhjused, miks matemaatika tasemetöö e-testina EIS-i süsteemis ei sobi. Kahjuks õpetajate ettepanekutega ei arvestata, ehkki kogu planeeritud tegevuse elluviijad oleme just meie õpetajad. Meie arvamusega mittearvestamine näitab suhtumist matemaatikaõpetajatesse ja matemaatikasse üldse.

Eesti matemaatika seltsi koolimatemaatika ühenduse aktiiv (KMÜ juhatuse liikmed ja maakondade ainesektioonide juhid, 24 allkirja)

(Matemaatikaõpetajate avalik kiri ilmus Õpetajate Lehes 23. septembril 2016.)

Matemaatikaõpetajate aktiivi infopäev Tartus

Sirje Pihlap
Tartu Ülikool

15. veebruaril 2014. aastal oli Tartus Hugo Treffneri gümnaasiumis matemaatikaõpetajate aktiivi infopäev. Järgnevalt väike ülevaade olulisemast.

Deivi Taal Innovest rääkis eelmisel kevadel toimunud 10. klasside katsetööst.

Müra oli selle töö ümber palju, sageli ka vales võtmes. Tänaseks on töörühm teinud kokkuvõtte ülesannetest, lahendatusest, õpetajate ankeetidest. Saadi olulist informatsiooni, millest on abi 2014. a kevadel toimuva kõigile kohustusliku riigieksami ettevalmistamisel. Huvi katsetöö vastu oli väga suur, registreerus 5809 õpilast 150 koolist. Huvi on jätkuv – selle aasta 11. klassi katsetööle on registreerunud 4600 õpilast. Deivi Taal tänas kõiki õpetajaid, kes on lahkelt nõus olnud koostööd tegema katsetöö küsimuses. Eelmise aasta katsetöö ja tulemuste analüüsi leiab Innove kodulehelt. Selle aasta 30. mail toimuva 11. klassi katsetöö vorm on sarnane praegusele riigieksamile. Töö toimub kahes osas. I osa algab kell 10 ja kestab 120 minutit. Peale 30 minutilist vaheaega algav II osa kestab 150 minutit. Kitsale ja laiale kursusele on eraldi tööd ja on palutud, et kitsast matemaatikat õppinud õpilane teeks kitsa matemaatika töö ning laia matemaatikat õppinud õpilane teeks laia matemaatika töö. 2014. a eksamil on õpilasel võimalik vabalt valida kitsas või lai eksam. Täpsem info selle aasta katsetöö kohta on aadressil `http://www.innove.ee/katseeksam2013`.

Selle aasta matemaatika riigieksam toimub 20. mail, lisaeksam 31. mail. 26. juuli korduseksamile saavad registreeruda ainult kahel eelpool nimetatud eksamil osalenud (läbikukkunud) õpilased. Uudiseks on, et sel aastal ei saa õpilased eksamitulemuse teavitust sõnumina ja ka see, et kõik kasutamata tööd (vihikud) võib kool endale jätta. Muutusi on ka põhikooli eksamil – õpilased saavad ülesannetega vihiku. Soovi korral võib kool lisaks anda mustandipaberi. 9. klassi eksam toimub vana õppekava järgi.

SIRJE TIBAR Innovest tutvustas e-ülesannete keskkonda EIS. Kuigi matemaatikaülesannete koostamiseks pole süsteem väga hea, võisime siiski näha päris huvitavaid ülesandeid. Hetkel on võimalik e-ülesandeid kasutada harjutamiseks, kunagi tulevikus võiks vast ka mingi osa eksamist olla e-ülesannete lahendamine. EIS-i e-ülesandeid saab lahendada veebilehel
`https://eis.ekk.edu.ee/eis`.

Ülesannete koostamiseks vajab Innove õpetajaid. Kel huvi on, võiks endast teada anda sirje.tibar@innove.ee.

Kristjan Korjus Tartu Ülikooli matemaatika-informaatikateaduskonnast tutvustas veebipõhist gümnaasiumimatemaatika ülesannete kogu. Kuigi õpetajad peavad sellist ülesannete kogu väga vajalikuks, on raskusi sellele veebilehele ülesannete saamisega. Kes leiab, et saaks abiks olla nõu või jõuga, võib Kristjaniga kontakti võtta korjus@gmail.com.

Kristjan andis ülevaate ka arvutipõhise statistikaõpetuse arendamisest HTMi ja Wolframi ühisprojektina. Projekti koordineeb Tartu Ülikool, koordinaatoriks on Kristjan Korjus. Projektist võib pikemalt lugeda Õpetajate Lehest.

Anne Aasamets tutvustas Õpetajate Ühenduste Koostöökoja tekkelugu ja tegemisi. Täpsema informatsiooni, sealhulgas eelseisvatest koolitustest, leiate koostöökoja koduleheküljelt.

Elts Abel tutvustas äsja kirjastuses Atlex ilmunud matemaatika valikkursuse “Arvuteooria elemendid I” õpikut, mille autoriteks on E. Abel ja R. VILT. Kohalolijate ning ka autori arvates leidub õpikus materjali, mida on võimalik kasutada ka noorematest klassides. Raamatut on soodne osta otse kirjastuselt: `www.atlex.ee`. Samas on ka teine väga hea õpik "Diskreetse matemaatika elemendid I". Ka see on mõeldud gümnaasiumi valikkursuse õpetamiseks, kuid sobivat materjali leidub noorematelegi õpilastele.

SIRJE PIHLAP tutvustas Tiigrimatemaatika 2014. aasta koolituskava. Pakutakse 9 tasuta kursust, mida on võimalik läbida veebipõhiselt Moodle'i keskkonnas. Kui on soovijaid, siis on võimalik ka auditoorse töö ja e-keskkonnas õppimise kombinatsioon. Tiigrimatemaatika põneva õpilasvõistluse "Märka matemaatikat enda ümber – liikumine" tähtaeg oli 2. aprill. Võistluse info võib leida aadressilt `http://sirjepihlap.weebly.com`.

Kirgi küttis EMS-i presidendi RAUL KANGRO ja EMS Koolimatemaatika Ühenduse juhi HELE KIISELI juhitud arutelu 2014. a riigieksami teemal. Ühisel seisukohal oldi, et peab olema kaks eraldi eksamit, üks kitsa, teine laia matemaatika ainekavale vastav. Kas lävendiks on 0, 20 või 50% sõltub sellest, kas tegemist on kooli lõpueksamiga või kõrgkooli sisseastumiseks mõeldud eksamiga. Et parasjagu oli Riigikogu plaanides PGS-i muutmine, siis arutelud sel teemal olid igati asjakohased. Õpetajate hääl oleks kindlasti see, millega ei tohiks siin arvestamata jätta. Kõlama jäi mure, et praegu pole meie riigis kõige paremini läbi mõeldud, mis saab neist noortest, kes tiheda konkursi tõttu ei pääse kutsekooli ja seetõttu on sunnitud õpinguid jätkama gümnaasiumis. Toetust leidis mõte, et riigieksamil läbikukkunud õpilased saaksid sooritada koolieksami juba samal suvel, miks mitte enne lõpuaktust.

Reklaamiti ka 13.–15. augustil Saaremaal toimunud EMS Koolimatemaatika Ühenduse suvepäevi, mille peakorraldajaks oli PAAVO KUUSEOK Saaremaa Ühisgümnaasiumist.

20 aastat nuputamist koos Känguruga

Raili Vilt
TÜ teaduskool

Känguru on suurima osalejate arvuga rahvusvaheline matemaatikavõistlus, mis 2015. aastal toimus Eestis 20. korda.

Võistlust nimetatakse rahvusvaheliseks, aga kuna erinevate riikide õpilaste tulemusi ei võrrelda omavahel, siis pigem on tegu võistlusega, mis sünnib rahvusvahelises koostöös. Algselt vaid Euroopa riike ühendanud võistlus on nüüdseks kasvanud ülemaailmseks. Võistlust korraldava assotsiatsiooniga *Kangourou sans Frontières* (www.aksf.org) on liitunud üle 60 riigi ja kokku osaleb neis üle 6 miljoni õpilase. Eestis korraldab võistlust TÜ teaduskool koostöös Eesti Matemaatika Seltsiga.

Võistluse idee on populariseerida matemaatikat läbi mänguliste ülesannete ja nuputamise, aga ei puudu ka ülesanded, mis vajavad koolis õpitud teadmisi ja oskusi. Ülesanded on valikvastustega ja jaotatud raskuse põhjal kolme rühma.

Idee on korraldada võistlust nii, et võimalikult paljud õpilased saaksid osaleda ning seejuures puuduks nn eelselektsioon, võistlus oleks avatud kõigile ning osalejatel puuduks aja- ja rahakulu võistluspaika jõudmiseks. Võistlus viiakse läbi koolides ja läbiviijateks on õpetajad.

Võistluse läbiviimiseks vajalikud materjalid (ülesannete tekstid ja lehed, kuhu vastuseid märkida) saadetakse koolidesse ning õpilaste vastustega lehed tuleb üleriigilise kokkuvõtte tegemiseks tagasi saata. Seega õpetajate ülesandeks ei ole õpilaste tööde kontrollimine, tõenäoliselt aga tuleb neil õpilastele ikkagi selgitusi jagada nii ülesannete tekstide mõistmise kohta kui ka nende lahenduste kohta. Võistlus on populaarne ja ka paljud lapsevanemad elavad sellele aktiivselt kaasa, valdavalt just nooremate klasside õpilaste vanemad. Seega pakub see võistlus lahendamisrõõmu nii õpilastele, lapsevanematele kui ka õpetajatele, sest esialgu vastuseid ja lahendusi ei saadeta.

Känguru on nagu rahvaspordiüritus, kus osalevad ka oma ala tipud. Kõik teavad, et märtsi lõpus võistlus toimub. Tippvõistlejad treenivad võistluseks ja nemad jahivad üldvõitu, teised püüavad vahetult enne võistlust ennast natuke paremasse vormi saada, et saadav tulemus oleks sõbrast parem, klassis parim, parim koolis või siis saada parem tulemus kui eelmisel aastal. Kolmas rühm osalejatest on need, kes tulevad ja osalevad ning vähemalt korra aastas panevad oma loogika ja teadmised proovile. Kõigil on võrdsed võimalused oma nutikust näidates saavutada hea koht ning loodetavasti jagub kõigil ka pärast võistlust veel mõtlemisainet, et miks ja kuidas.

Kui aastal 2014 said esimest korda oma vanuserühma preekolierid 1.–2. klassi õpilased, siis aastal 2015 lisandus vanuserühm student 11.–12. klassi õpilastele. Seega 20. Känguru võistlusest said osa võtta juba kõikide klasside õpilased. Võistlusmängu korraldamine koolis paneb matemaatikaõpetajad tihedamat koostööd tegema klassiõpetajatega ning arvatavasti jagub koostööd ka ülesannete lahendamisel.

Osalejaid on pea igal aastal Prangli saarest Ruhnuni, Narva-Jõesuust Lümandani ja Noarootsist Missoni.

Aastal 2015 osales 20 798 õpilast 392 koolist. Esmakordselt olid osalemas nii kutsekooli kui ka täiskasvanute gümnaasiumi õpilased.

Kuna sel aastal esimest korda osales ka student vanuserühm, siis näitena kaks 5-punktist ülesaannet, kuigi lahendajate jaoks oli nende raskusaste täiesti erinev.

Kui lugeda vastusevariantides antud lauseid vasakult paremale, siis milline on esimene tõene lause?
A: C on tõene, B: A on tõene, C: E on väär, D: B on väär, E: $1+1=2$.

Kui palju on erinevaid kolmnurki ABC*, kus* $\angle ABC = 90^\circ$ *ja* $AB = 20$ cm *ning mille kõikide külgede pikkused on täisarv sentimeetreid?*

A: 1 *B:* 2 *C:* 3 *D:* 4 *E:* 6

Esimene neist vajab vaid loogikat ja õige vastuse andis 699 õpilast. Teisele ülesandele andis õige vastuse vaid 54 õpilast (osales 995 õpilast).

Aastal 2016 osales 21 912 õpilast 404 koolist. Peaaegu pooled osalejatest olid kahest nooremast vanuserühmast, st 1.–4. klassi õpilased.

Nende vanuserühmade ülesanded on matemaatiliselt lihtsad, aga põhiline raskus on nende sõnastustes. Tekstid peavad olema lühikesed, kasutama neile teadaolevaid sõnu ja mõisteid ning arusaadavad nii väikestele lahendajatele, kelle lugemisokus ja loetu mõistmine ei ole veel nii head, kui ka suurematele, kes juba teavad rohkem.

Kuna enamus nende vanuserühmade ülesandeid on lahendatavad ühe-kahe tehtega, siis oluline ongi just vaid tähelepanelik lugemine või joonise vaatamine.

Järgnevad kaks ülesannet olid väärt 3 punkti ning esimene neist oli rühmal pre-ekolierid ja teine rühmal ekolierid.

Martin läks koos oma kümne sõbraga kelgutama. Sõprade seas oli kuus tüdrukut. Mitu poissi läks kelgutama?

A: 4 *B:* 5 *C:* 6 *D:* 7 *E:* 8

Õige vastuse (5 poissi) andis 1004 õpilast. Vastusevariandi A valis 3862 õpilast (osales 5391 õpilast).

Juku kirjutas tahvlile arvud 25 *ja* 57 *ning kõik nende vahel olevad arvud. Mitu arvu ta tahvlile kirjutas?*

A: 31 *B:* 32 *C:* 33 *D:* 34 *E:* 35

Õige vastuse 33 andis 1079 õpilast ja valedest vastustest arvu 32 eelistas 3433 õpilast (osales 5510 õpilast).

Segadust ei tekita nende jaoks see, et jutt käib lihtsalt arvudest, sest nad ongi õppinud vaid mittenegatiivseid täisarve, vaid ikka mõistmine, kas nende arvude vahe leidmine annab vastuse esitatud küsimusele.

Kuigi osavõtt ja rõõm ülesannete lahendamisest on tähtsamad kui võit, siis alati teeb headmeelt see, kui vanuserühm võidetakse maksimumpunktidega. Aastal 2015 võideti vanuserühm maksimutulemusega vanuserühmades pre-ekolierid, benjaminid ja juuniorid.

Aastal 2016 ei võidetud vaid kadettide vanuserühma maksimumpunktidega ning ekolieride vanuserühmas saavutas maksimumtulemuse lausa 19 õpilast.

Kõik ülesanded on kättesaadavad teaduskooli kodulehel:
http://www.teaduskool.ut.ee/et/ainevoistlused/kanguru

Kui ise oleme juba aastatega harjunud selliste ülesannetega, siis nii õpilaste kui lapsevanemate tagasiside on ikka see, et Känguru pakub lahendamiseks teistsuguseid ülesandeid kui tavaliselt koolitundides lahendatakse. On ainult rõõm, et leidub nii palju neid, kes soovivad ennast proovile panna ja et koolid ja õpetajad ikka seda võistlusmängu oma koolis läbi viivad.

KÄNGURU

Kokkuvõte õpilaste matemaatikavõistlustest aastal 2013

HÄRMEL NESTRA
Tartu Ülikool

Aastal 2013 kevadpoolaastal toimusid kooliõpilastele tavapäraselt olümpiaadi piirkonnavoor ja lõppvoor ning valikvõistlus rahvusvahelise matemaatikaolümpiaadi võistkonna väljaselgitamiseks, sügispoolaastal aga kaks lahtist võistlust. Lisaks osalesid Eesti võistkonnad rahvusvahelisel matemaatikaolümpiaadil (IMO) ja Põhja-Euroopa maid ühendaval võistkondlikul matemaatikavõistlusel "Balti Tee".

Meenutame kõiki neid võistlusi kronoloogilises järjestuses. Iga võistluse kohta toome ära parimad õpilased, mõne võistluse kohta esitame ka mõne ülesande või huvitava fakti.

Piirkonnavoor

Piirkonnavoor toimus 19. jaanuaril ja seal osalesid õpilased 7.–12. klassidest. Esitame tulemused vaid 7.–8. klassi osas, sest kõrgemate klasside jaoks on võistlus vaid selekteerivas rollis ja lõplik pingerida selgub lõppvoorus. Tabelite lugemisel võib arvestada, et maksimaalne võimalik tulemus oli 41 punkti.

Üks võitjapaarist, Richard Luhtaru, oli tegelikult alles 6. klassi õpilane. Teine paariline, Kaarel Hänni, oli aasta varem samuti 6. klassi õpilasena edukalt 7. klassi piirkonnavooru ülesandeid lahendanud. Tookord ta esimeseks siiski ei tulnud, kuid saavutas auväärt esikümnekoha.

7. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte
1.	Richard Luhtaru	Miina Härma Gümnaasium	41
1.	Kaarel Hänni	Tallinna Prantsuse Lütseum	41

3.	Loona Volke	Miina Härma Gümnaasium	40
4.	Karl Paul Parmakson	Miina Härma Gümnaasium	38
4.	Kirill Bedjuhhov	Narva Pähklimäe Gümnaasium	38
6.	Joanna Hansen	Tartu Erakool	37
6.	Triin Mirjam Tark	Põlva Ühisgümnaasium	37
6.	Karl-Johan Pilve	Pärnu Koidula Gümnaasium	37
6.	Brita Kärt Vähejaus	Tallinna Reaalkool	37
6.	Rando Tõnso	Tallinna Reaalkool	37
6.	Peter Alex Mahhov	Tallinna 21. Kool	37
6.	Kristofer Sokk	Tallinna Reaalkool	37

8. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte
1.	Laura Olek	Tallinna Reaalkool	41
2.	Raul Niit	Tallinna Reaalkool	40
3.	Tähvend Uustalu	Tallinna Mustamäe Gümnaasium	39
3.	Carel Kuusk	Tallinna Prantsuse Lütseum	39
5.	Doris Käämbre	Nõo Põhikool	38
5.	Tuule Müürsepp	Antsla Gümnaasium	38
5.	Aleksandr Kožajev	Narva Vanalinna Riigikool	38
5.	Hendriico Merila	Pärnu Sütevaka Humanitaargümn.	38
9.	Kerli Tali	Tartu Kivilinna Gümnaasium	37
9.	Karin Niinemets	Viljandi Paalalinna Kool	37
9.	Siret Jorro	Rakvere Gümnaasium	37
9.	Romet Martjan	Lustivere Põhikool	37
9.	Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	37

Üheksanda koha jagamiselt leiame muuhulgas Joonas Jürgen Kiseli, kes hiljem saavutas palju kõrgeid kohti erinevatel matemaatikavõistlustel ja jõudis korduvalt ka rahvusvahelise matemaatikaolümpiaadi võistkonda. Peale selle tunnevad asjaomased ringkonnad teda kui ristsõnade lahendamise mitmekordset Eesti meistrit.

Lõppvoor

Lõppvoor toimus 6.–7. aprillil. Igast klassist oli võistlusele kutsutud umbes 25 õpilast üle Eesti, neist antakse järgudiplomid orienteeruvalt 10 parimale. Kõigis klassides oli maksimaalseks võimalikuks tulemuseks 35 punkti, mis tähendab 7 punkti iga ülesande eest.

9. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Diplom
1.	Kristjan Kongas	Vanalinna Hariduskolleegium	34	I
2.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	32	I
3.	Elo Maria Pauman	Tallinna Prantsuse Lütseum	27	II
3.	Qianyue Jin	Kirkkojärven Koulu	27	II
3.	Svenno Saan	Tartu Kivilinna Gümnaasium	27	II
6.	Ott Adermann	Tallinna Reaalkool	26	II
7.	Mirjam Iher	Tartu Descartes'i Lütseum	24	III
8.	Eva-Maria Tõnson	Tartu Veeriku Kool	23	III
8.	Hannes Ihalainen	Lahden Yhteiskoulu	23	III
8.	Taavet Kalda	Gustav Adolfi Gümnaasium	23	III

Kaheksanda koha jagamisele jõudnud Gustav Adolfi Gümnaasiumi õpilane Taavet Kalda oli tegelikult 8. klassi õpilane, kes oli 9. klassi piirkonnavooru kutsutud eduka esinemise põhjal lahtistel võistlustel.

Auhinnalistelt kohtadelt leiame ka kaks Soome õpilast, kes tavapäraselt 9. klassis Eesti olümpiaadi lõppvoorus osalevad.

10. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Diplom
1.	Triinu Veeorg	Tallinna Reaalkool	32	I
2.	Joonas Kalda	Tallinna Reaalkool	24	II
3.	Triinu Hordo	Hugo Treffneri Gümnaasium	23	II
4.	Simmo Saan	Hugo Treffneri Gümnaasium	20	II

5.	Andri Parvelo	Hugo Treffneri Gümnaasium	18	III
6.	Hans Daniel Kaimre	Hugo Treffneri Gümnaasium	17	III
6.	Anti Kaar	Tallinna Reaalkool	17	III
6.	Annemai Avingu	Tallinna Reaalkool	17	III

Pika puuga teistele ära teinud Triinu Veeoru venda Janno Veeorgu tundsid olümpiaadihuvilised juba siis tipptegijana, kes korduvalt rahvusvahelistel matemaatikaolümpiaadidel Eestit esindanud. Etteruttavalt võib öelda, et järgmistel aastatel töötasid tahapoole jäänud õpilased Joonas Kalda ja Simmo Saan end Triinule järele. Triinu ja Joonas esinesid hiljem üsna võrdselt edukalt koos rahvusvahelistel matemaatikavõistlustel.

11. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Diplom
1.	Liisi Metsoja	Hugo Treffneri Gümnaasium	24	I
1.	Kaur Kristjuhan	Hugo Treffneri Gümnaasium	24	I
1.	Oliver-Matis Lill	Tallinna Reaalkool	24	I
1.	Daniil Demišin	Narva Humanitaarg.	24	I
5.	Jüri Gramann	Tallinna Reaalkool	20	III
5.	Siim Sammul	Hugo Treffneri Gümnaasium	20	III
5.	Mari Liis Pedak	Tallinna Reaalkool	20	III
8.	Raid Vellerind	Tallinna Reaalkool	19	III
8.	Annika Kluge	Tallinna Õismäe Gümnaasium	19	III

Võitjate tagasihoidlik punktisaak on kaja aasta varem 10. klassis juhtunust, kus võit tuli 16 punktiga. Sellest nõrgast aastakäigust jõudis üks õpilane siiski rahvusvahelisele matemaatikaolümpiaadile. Kes see oli, saate teada, kui loete edasi!

12. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Diplom
1.	Jaan Toots	Tallinna Reaalkool	35	I
1.	Janno Veeorg	Tallinna Reaalkool	35	I
3.	Kaur Aare Saar	Hugo Treffneri Gümnaasium	34	I
4.	Andres Põldaru	Tallinna 32. Keskkool	30	II
5.	Sandra Schumann	Tallinna Reaalkool	28	II
6.	Kristo Ment	Pärnu Koidula Gümnaasium	27	II
7.	Jörgen Jügiste	Tallinna Reaalkool	25	III
8.	Aleksandra Jartseva	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	23	III

Esikuuiku õpilastest viis olid juba käinud IMOl, nii et tase oli ühtlaselt kõrge. Kaur Aare Saar, kes aasta varem oli juba kord proovinud 12. klassi võita, kaotas küll vaid ühe õnnetu punkti, kuid jäi nii ka seekord esikohast ilma.

Olgu siin toodud näitena üks (kõige lihtsam) ülesanne 12. klassi komplektist. Ülesande autor on toonane TÜ matemaatika instituudi teadur Urve Kangro. Lahenduse võib lugeja ise välja mõelda.

> 1. Matemaatika huviringis palub õpetaja Jüril mõelda mingi positiivne paaritu täisarv n ning kirjutada tahvlile mingi täisarvuliste liikmetega aritmeetilise jada n järjestikust liiget õiges järjestuses, Maril aga palub ta otsustada, kas kõigi Jüri kirjutatavate arvude kogusumma jagub n-ga. Jüri tahvli juurde minnes on mõlemal õpilasel mõlemale antud ülesanded teada. Kui ruttu on Maril võimalik vastata?
>
> 2. Sama küsimus, kui n on paaris.

Eriauhinnad

Kirjastuse Avita kolm eriauhinda pälvisid Jaan Toots, Janno Veeorg ja Kaur Aare Saar. Swedbanga stipendiumi "Benoit Mandelbroti jälgedes" said Andres Põldaru, Liisi Metsoja, Kaur Kristjuhan, Oliver-Matis Lill, Daniil Demišin, Triinu Veeorg, Joonas Kalda, Triinu Hordo, Kristjan Kongas ja Oliver Nisumaa. Ilves "Extra" eriauhinna, joped, said Janno ja Triinu Veeorg.

Valikvõistlus

Rahvusvahelise matemaatikaolümpiaadi võistkonna valikuks korraldatud valikvõistlusele kutsuti seekord 8.–12. klassidest kokku 22 õpilast, kellest 1 loobus. Tulemused olid järgmised.

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte
1.	Sandra Schumann	Tallinna Reaalkool	12.	24
2.	Aleksandra Jartseva	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	12.	22
2.	Kaur Aare Saar	Hugo Treffneri Gümnaasium	12.	22
4.	Kristo Ment	Pärnu Koidula Gümnaasium	12.	20
4.	Oliver-Matis Lill	Tallinna Reaalkool	11.	20
6.	Janno Veeorg	Tallinna Reaalkool	12.	19
7.	Joonas Kalda	Tallinna Reaalkool	10.	17
7.	Kristjan Kongas	Vanalinna Hariduskolleegium	9.	17
9.	Simmo Saan	Hugo Treffneri Gümnaasium	10.	16
10.	Andres Põldaru	Tallinna 32. Keskkool	12.	14
10.	Triinu Veeorg	Tallinna Reaalkool	10.	14
12.	Jaan Toots	Tallinna Reaalkool	12.	11
13.	Andre Ostrak	Nõo Reaalgümnaasium	12.	10
13.	Kaur Kristjuhan	Hugo Treffneri Gümnaasium	11.	10
15.	Vadim Šved	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	10.	8
16.	Liisi Metsoja	Hugo Treffneri Gümnaasium	11.	7
17.	Taavet Kalda	Gustav Adolfi Gümnaasium	8.	6
18.	Daniil Demišin	Narva Humanitaargümn.	11.	5
18.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	9.	5
20.	Andri Parvelo	Hugo Treffneri Gümnaasium	10.	3
21.	Triinu Hordo	Hugo Treffneri Gümnaasium	10.	2

Valikvõistlus toimus 1.–2. mail IMO formaadis: kahe päeva jooksul anti kummalgi lahendada 3 ülesannet, millest igaüks maksab 7 punkti. Kokku on võimalik teenida niisiis kuni 42 punkti.

Võistkonda valiti pingerea kuus esimest, st 12. klassi õpilased Sandra Schumann, Aleksandra Jartseva, Kaur Aare Saar, Kristo Ment ja Janno Veeorg ning 11. klassi õpilane Oliver-Matis Lill. Kõik võistkonda valitud 12. klassi õpilased olid juba varem IMOl käinud ja suure raskete ülesannete lahendamise kogemuse pagasiga. Seda üllatavam on "nõrgast aastakäigust" pärit Oliver-Matis Lille jõudmine ainsana valikvõistlusele kutsutuist nendega koos esikuuikusse.

IMO

Rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad (IMO) toimus 18.–28. juulil Kolumbia Kariibi mere äärses suurlinnas Santa Martas. Võistkonna saatjad olid TÜ matemaatika instituudi teadur Urve Kangro ja TÜ matemaatikadoktorant Oleg Košik. Võistlus toimus tavapärases formaadis (kahel päeval kummalgi 3 ülesannet).

Toome näitena esimese päeva esimese ülesande teksti. Lugeja võib proovida ise lahendada. Märgime, et esimene ülesanne on tavakohaselt IMO mõistes lihtne (vähemalt žürii püüab ülesandeid niimoodi valida). Ehkki žürii töökeel on inglise keel, tõlgitakse kõik ülesanded kõigi osavõtjamaade keeltesse ja õpilased võivad ka lahendusi omas keeles vormistada.

> Näidata, et iga positiivsete täisarvude paari k ja n korral leidub k positiivset täisarvu $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (mitte tingimata erinevat) nii, et
>
> $$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Eesti võistkonna tulemused olid järgmised.

Nimi	ül1	ül2	ül3	ül4	ül5	ül6	Kokku	Koht	Tunnustus
Janno Veeorg	7	2	0	7	0	0	16	234.	pronksmedal
Sandra Schumann	7	0	0	7	1	0	15	250.	pronksmedal
Kaur Aare Saar	1	4	0	7	0	0	12	302.	diplom
Oliver-Matis Lill	7	4	0	0	0	0	11	306.	diplom
Kristo Ment	7	0	0	2	0	0	9	335.	diplom
Aleksandra Jartseva	1	0	0	3	0	0	4	442.	

Seekord tõid Eesti õpilased ära kaks pronksmedalit, mis viimaste aegade kohta on suurepärane saavutus. Sandra Schumannist sai esimene tüdruk, kes Eesti võistkonnas rahvusvahelisel matemaatikaolümpiaadil medali teenib. Eesti hakkas IMOl osalema ametlikult aastal 1993 (aastal 1992 osales Eesti vaatlejastaatuses), mil Peeter Laud tõi Eestile esimese medali. Sandra sündis aastal 1994.

Mitteametlikus riikide arvestuses võistlejate punktide summa alusel oli esimene tavapäraselt Hiina, järgnesid Lõuna-Korea, Ameerika Ühendriigid, Venemaa, Põhja-Korea, Singapur, Vietnam ja Taivan. Niisiis oli esikaheksas tervelt kuus riiki Aasiast. Eesti oli harju keskmisel 55. kohal. Kokku osales 97 maad.

Kui sisuline korraldus oli igati heal tasemel (koordinatsioonis ei tekkinud taolisi probleeme nagu aasta varem samuti Ladina-Ameerikasse kuuluvas Argentiinas), siis päris ilma viperusteta Eesti võiskonnal reis ei läinud. Nimelt jõudis meie võistkond kohale üks öö ettenähtust varem, mistõttu pidid nad selle öö eest hotellile ise maksma. Selles oli varem interneti teel kokku lepitud. Kohapeal aga asus hotelli administraator nõudma kokku lepitust ligi kaks korda kõrgemat hinda. Põhjenduseks toodi, et varem teatatud kaheinimesetoa hind on tegelikult ühe inimese hind kaheinimesetoas. Selline nõue ja selgitus nägi algusest peale jabur välja, sest interneti teel oli võistkonna saatjale juba esitatud ka kalkulatsioon koos terve võistkonna ööbimise kogumaksumusega. Samuti oli vaidlusalune hind üksinda kõrgem kui üheinimesetoa hind. Võistkonna saatja Oleg Košik sellise arvestuse järgi maksma ei nõustunud ja mitmekümneminutilise vaidluse tulemusel saidki eestlased oma tahtmise.

Kolumbia on kontrastide maa. Kui Kariibi mere ääres on ekvatoriaalne kliima aastaringse palavusega, siis pealinn Bogotá kõrgmägede veerul upub isegi suvel mõnusasse eestimaisse jahedusse. Meie võistkond tegi enne tagasisõitu ka omaalgatusliku tiiru pealinnas.

Sügisene lahtine võistlus

Uue õppeaasta esimene lahtine võistlus toimus 5. oktoobril 7 kohas üle Eesti. Nagu tavaks, võisteldi kahes vanuseastmes – nooremas ja vanemas rühmas. Nooremas tohivad võistelda kuni 10. klassi õpilased, vanemas aga kõik osalejad. Uuendusena anti nooremas rühmas lahendada 6 ülesannet senise 5 asemel. Eesmärgiks oli läbi lisandunud lihtsate ülesannete pakkuda lahendamisrõõmu suuremale hulgale osalejatele.

Et hilissügisel toimuva "Balti Tee" võistkonna valikul arvestatakse vaid vanema rühma tulemusi, on vanemas rühmas osalemine populaarne ka nooremate klasside tugevamate õpilaste seas. Suuremas osas jõuavad sellised õpilased ka auhinnalisele kohale, mõni isegi võistkonda.

Noorem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Diplom
1.	Eva-Maria Tõnson	Hugo Treffneri Gümn.	10.	33	I
1.	Andres Unt	Tallinna Reaalkool	10.	33	I
3.	Edward Erelt	Tallinna Reaalkool	10.	31	II
4.	Richard Luhtaru	Miina Härma Gümn.	7.	30	II
4.	Elo Maria Pauman	Hugo Treffneri Gümn.	10.	30	II
6.	Markus Rene Pae	Gustav Adolfi Gümn.	10.	27	III
6.	Gleb Stepanov	Ahtme Gümnaasium	10.	27	III
8.	Mirjam Iher	Hugo Treffneri Gümn.	10.	25	III
8.	Svenno Saan	Hugo Treffneri Gümn.	10.	25	III

Seitsmenda klassi õpilasena auhinnalisele kohale jõudnud Richard Luhtaru lugeja juba tunneb: sama õpilane võitis 6. klassi õpilasena 7. klassi piirkonnavooru.

Vanem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Auhind
1.	Triinu Veeorg	Tallinna Reaalkool	11.	26	I
2.	Oliver-Matis Lill	Tallinna Vanalinna Täiskasvanute Gümn.	12.	23	II
2.	Joonas Kalda	Tallinna Reaalkool	11.	23	II
4.	Kristjan Kongas	Tallinna Reaalkool	10.	18	III
5.	Taavet Kalda	Gustav Adolfi Gümn.	9.	16	III
6.	Daniil Demišin	Narva Humanitaarg.	12.	15	III
6.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	10.	15	III
8.	Raid Vellerind	Tallinna Reaalkool	12.	13	III
8.	Simmo Saan	Hugo Treffneri Gümn.	11.	13	III

"Balti Tee" võistkonda valiti vanema rühma 5 parimat. Nagu näha, on nende seas ka üks 10. ja üks 9. klassi õpilane.

"Balti Tee"

Võistkondlik Põhja-Euroopa maid hõlmav matemaatikavõistlus "Balti Tee" toimus 7.–11. novembril Riias. Igat osalevat riiki esindab sel võistlusel viiest õpilasest koosnev võistkond, kes lahendab ülesandeid koos ja esitab igale ülesandele ühe lahenduse. Eesti võistkonda kuulusid Triinu Veeorg, Oliver-Matis Lill, Joonas Kalda, Kristjan Kongas ja Joonase noorem vend Taavet Kalda. Võistkonna saatjad olid TÜ arvutiteaduse instituudi dotsent Härmel Nestra ja TÜ matemaatika instituudi lektor Indrek Zolk.

Eesti jäi 11 riigi seas jällegi 7. kohale nagu aasta varem. Punkte koguti 100-st 56. Kui võitja selgitatakse enamasti Peterburi ja Poola võistkondade vahel, siis seekord tegi Läti võistkond koduseinte toetusel võimsa lõpuspurdi ja võitis võistluse 77 punktiga. Pikalt liidrikohta hoidnud Peterburi ja Poola jäid 76 punkti ja pika ninaga jagama teist kohta.

Meie õpilaste tulemust võib pidada isegi ootuspärasest kõrgemaks, kuna varasemate aastate tugevate tegijate punt oli kooli lõpetanud ja võistkonna moodustasid peamiselt nooremad ja puuduvate kogemustega uustulijad.

Toome näitena ära Eesti pakutud ülesande 17. Ülesande autor on "Balti Tee" 2009 ja IMO 2010 Eesti võistkonna liige, tollal Edinburgh'i Ülikooli matemaatikatudeng Erik Paemurru.

> Olgu c ja $n > c$ positiivsed täisarvud. Mari õpetaja kirjutab tahvlile n positiivset täisarvu. Kas vastab tõele, et iga n ja c korral saab Mari alati õpetaja poolt kirjutatud arvud tähistada muutujatega $a_1, \ldots, a_n$ mingis järjestuses, nii et tsüklilise korrutise
>
> $$(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$$
>
> väärtus oleks kongruentne arvuga 0 või c mooduli n järgi?

Eesti võistkond sai sellest vaid 1 punkti, kuid paljude teiste võistkondade jaoks see ülesanne raskeks ei osutunud.

Ajal, kui õpilased lahendasid, viidi juhendajad ekskursioonile... Riia turule, kus neile anti seal müüdavat toidukraami maitsta! Enne viimase päeva õhtust lõputseremooniat viidi nii õpilased kui ka saatjad aga ekskursioonile Siguldasse ja Turaidasse.

Talvine lahtine võistlus

Talvine lahtine võistlus jätkas uut formaati 6 ülesandega nooremas rühmas.

Noorem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Diplom
1.	Andres Unt	Tallinna Reaalkool	10.	42	I
1.	Richard Luhtaru	Miina Härma Gümn.	7.	42	I
3.	Jonatan Kalmus	Hugo Treffneri Gümn.	10.	39	II
4.	Kaarel Hänni	Tallinna Prantsuse Lütseum	8.	38	II
5.	Kristjan Kõiv	Rapla Vesiroosi Gümn.	7.	36	III

5.	Ilja Zebergs	Tallinna Reaalkool	10.	36	III
7.	Elo Maria Pauman	Hugo Treffneri Gümn.	10.	35	III
7.	Svenno Saan	Hugo Treffneri Gümn.	10.	35	III
9.	Edward Erelt	Tallinna Reaalkool	10.	34	III
9.	Pjotr Kruglov	Ahtme Gümnaasium	10.	34	III

Vanem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Diplom
1.	Triinu Veeorg	Tallinna Reaalkool	11.	30	I
1.	Oliver-Matis Lill	Tallinna Vanalinna Täiskasvanute Gümn.	12.	30	I
3.	Joonas Kalda	Tallinna Reaalkool	11.	21	II
4.	Liisi Metsoja	Hugo Treffneri Gümn.	12.	20	II
5.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	10.	18	III
6.	Mattias Lass	Tallinna Reaalkool	12.	16	III
7.	Simmo Saan	Hugo Treffneri Gümn.	11.	14	III

Kuigi talvisel lahtisel võistlusel rahvusvahelise võistluse kohti ei jagata, on tavapärane, et mõni nooremate klasside õpilane ikkagi vanema rühma arvestuses võistleb ja ka auhinnalisele kohale jõuab.

Kokkuvõte

Ka aastal 2013 jätkus algul endiste tugevate abituuriumi jõudnud õpilaste võidukäik. Tähelennu tegi aga Oliver-Matis Lill, kes varem tugevate õpilaste puudusega silma paistnud aastakäigust jõudis välja IMOle ja "Balti Teele". Joonas Kalda kõrval tõusis "Balti Tee" võistkonda tema vend Taavet, ehk erinevaid perenimesid esineb juba krooniliselt vähem kui võiks (ka Veeorge on kaks). Endast hakkas märku andma kevadel 6. klassi lõpetanud Richard Luhtaru. Lugeja võis märgata, et talvisel lahtisel võistlusel polnud enam ükski noorema rühma ülesanne talle alistumatu. Täispunktidega tõusis ta esikoha jagamisele. Kas järgmisel aastal võistleb ta 8. klassi õpilasena vanemas rühmas? Kes loeb järgmist artiklit 2013/14 õppeaastast, saab teada!

Kokkuvõte õpilaste matemaatikavõistlustest aastal 2014

Härmel Nestra
Tartu Ülikool

Nagu tavaliselt, toimusid ka aastal 2014 olümpiaadi piirkonna- ja lõppvoor, valikvõistlus IMO võistkonna kandidaatidele ning kaks lahtist võistlust. Rahvusvahelistest võistlustest osaleti IMOl ja "Balti Teel".

Piirkonnavoor

Piirkonnavoor toimus 25. jaanuaril tavakohaselt 7.–12. klasside õpilastele. Piirkonnavooru tulemused esitame 7.–8. klasside osas, kõrgemate klasside pingerea määrab lõppvoor. Maksimaalne võimalik tulemus piirkonnavooru 7.–8. klassides oli 41 punkti.

7. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte
1.	Toomas Tennisberg	Tartu Kesklinna Kool	38
2.	Ellen Leib	Tartu Kommertsgümnaasium	37
2.	Aksel Bulavs	Tartu Kesklinna Kool	37
2.	Annika Jaakson	Parksepa Keskkool	37
5.	Sullo Saan	Tartu Kivilinna Gümnaasium	36
5.	Karoliina Tomasson	Tartu Kommertsgümnaasium	36
7.	Hanna Sõnajalg	Tartu Mart Reiniku Kool	35
7.	Marie Tempel	Tartu Kommertsgümnaasium	35
7.	Anna Krupina	Tallinna Õismäe Vene Lütseum	35
7.	Karl Suurkaev	Gustav Adolfi Gümnaasium	35
7.	Tormi Ariva	Viljandi Kesklinna Kool	35
7.	Maarja Täht	Pärnu Vanalinna Põhikool	35
7.	Uku Jõgi	Ilmatsalu Põhikool	35
7.	Andres Kauri	Kehtna Põhikool	35

Kaugeltki mitte kõigist neist, kes 7. klassi piirkonnavooru tulemuste tabelis on tipus, ei saa säravat tegijat. Ajas ette vaatavalt võib öelda, et paar tulevikutähte selles tabelis leidub.

8. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte
1.	Kaarel Hänni	Tallinna Prantsuse Lütseum	39
2.	Karl Paul Parmakson	Miina Härma Gümnaasium	38
3.	Joosep Pärn	Tallinna Inglise Kolledž	37
4.	Andreas Teder	Tartu Raatuse Gümnaasium	35
4.	Airon Johannes Oravas	Tallinna Prantsuse Lütseum	35
4.	Oskar Aru	Pärnu Koidula Gümnaasium	35
7.	Keilin Turjakas	Põltsamaa Ühisgümnaasium	34
7.	Kauri Suur	Tamsalu Gümnaasium	34
9.	Kati Iher	Tartu Descartes'i Lütseum	33
9.	Tavo Annus	Tallinna Reaalkool	33
9.	Elina-Dariya Davydik	Tallinna Õismäe Vene Lütseum	33
9.	Sirgit Säga	Ülenurme Gümnaasium	33
9.	Karin Kruuse	Nõo Põhikool	33
9.	Roman Oleinik	Narva Pähklimäe Gümnaasium	33

Kaarel Hänni tuli esikohale juba teist aastat ja esikümnesse kolmandat aastat järjest.

Lõppvoor

Lõppvoor toimus sel aastal varakult, juba 8.–9. märtsil. Nagu tavaliselt, kutsuti lõppvooru *ca* 25 õpilast igast klassist. Kõigis klassides oli maksimaalseks võimalikuks tulemuseks 35 punkti.

9. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Diplom
1.	Taavet Kalda	Gustav Adolfi Gümnaasium	35	I
2.	Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	33	I
3.	Kaarel Hänni	Tallinna Prantsuse Lütseum	32	I
4.	Kati Iher	Tartu Descartes'i Lütseum	26	II
5.	Richard Luhtaru	Miina Härma Gümnaasium	25	II
6.	Vesa Ala-Laurinaho	Olarin Koulu	24	II
7.	Mark Gerassimenko	Kohtla-Järve Maleva Põhikool	20	III
8.	Joosep Viik	Tallinna Reaalkool	19	III
8.	Kristjan Kõiv	Rapla Vesiroosi Gümnaasium	19	III
8.	Toomas Tennisberg	Tartu Kesklinna Kool	19	III

Lõppvooru 9. klassi arvestuses võistlevad sageli nooremate klasside õpilased, sest lahtiste võistluste tulemuste põhjal lõppvooru kutsutavad noorema kui 9. klassi õpilased pannakse oma klassi kategooria puudumisel võistlema 9. klassi. Võiks arvata, et vanemate õpilaste vastu võistelda on raske, kuid tegelikult esinevad sellised õpilased reeglina edukalt. Sel aastal jõudis esikümnesse lausa viis noorema kui 9. klassi õpilast: Kaarel Hänni ja Kati Iher 8. klassist ning Richard Luhtaru, Kristjan Kõiv ja Toomas Tennisberg 7. klassist.

Et auhinnatute seas on ka üks Soome õpilane, siis vaid neli õpilast esikümnes olid tegelikult Eesti koolide 9. klassi õpilased, kelle jaoks võistlus esmajoones mõeldud.

10. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Diplom
1.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	35	I
2.	Kristjan Kongas	Tallinna Reaalkool	33	I
3.	Eva-Maria Tõnson	Hugo Treffneri Gümn.	31	II
4.	Elo Maria Pauman	Hugo Treffneri Gümn.	28	II

5.	Mirjam Iher	Hugo Treffneri Gümn.	23	III
6.	Andres Unt	Tallinna Reaalkool	20	III
7.	Jonatan Kalmus	Hugo Treffneri Gümn.	19	III
7.	Markus Rene Pae	Gustav Adolfi Gümn.	19	III
9.	Svenno Saan	Hugo Treffneri Gümn.	18	III
9.	Edward Erelt	Tallinna Reaalkool	18	III

Selles tabelis torkab silma kahe kooli, Tallinna Reaalkooli ja Hugo Treffneri Gümnaasiumi domineerimine. Nende kahe kooli üleolek just kõrgemates klassides on järjest süvenev.

11. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Diplom
1.	Joonas Kalda	Tallinna Reaalkool	21	I
2.	Triinu Veeorg	Tallinna Reaalkool	18	II
3.	Simmo Saan	Hugo Treffneri Gümnaasium	16	II
3.	Rasmus Kisel	Gustav Adolfi Gümnaasium	16	II
5.	William Vaask	Gustav Adolfi Gümnaasium	14	III
6.	Erik Amor	Pärnu Koidula Gümnaasium	12	III
7.	Vadim Šved	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	11	III
7.	Hans Daniel Kaimre	Hugo Treffneri Gümnaasium	11	III

Madalad punktisummad on seekord tingitud tahtmatult raskeks kujunenud ülesannete komplektist. Õpilased selles aastakäigus ei olnud sugugi nõrgad. Toome siin näitena ära 4. ülesande, mille eest said kõik lõppvoorus osalenud 11. klassi õpilased kokku vaid 4 punkti. Selline ülesanne sobinuks palju paremini IMO võistkonna valikvõistlusele.

> Ruudustikus mõõtmetega $2n \times 2n$ on täpselt pooled ruudud värvitud mustaks ja ülejäänud valgeks. Ühel sammul võib vabalt valida selle ruudustiku ruudu mõõtmetega 2×2 ja peegeldada tema nelja ühikruudu värvid selle 2×2 ruudu horisontaalse või vertikaalse

kesktelje suhtes. Milliste positiivsete täisarvude n korral on suvalise algse ruutude värvimise korral võimalik selliste sammudega jõuda olukorda, kus kogu ruudustik on värvitud malekorras?

12. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Diplom
1.	Oliver-Matis Lill	Tallinna Vanalinna Täiskasvanute Gümnaasium	30	I
2.	Kaur Kristjuhan	Hugo Treffneri Gümnaasium	21	II
3.	Raid Vellerind	Tallinna Reaalkool	12	III
4.	Simo Pähk	Viljandi Gümnaasium	11	III
4.	Stepan Fjodorov	Narva Humanitaargümn.	11	III
6.	Uku-Kaspar Uustalu	Tallinna Reaalkool	10	III

Siin ei saa kummalist languskõverat ainult raske komplekti süüks ajada. Kurikuulus "nõrk aastakäik", kelle tulemused kaks aastat varem 10. klassis pälvisid meedia tähelepanu, oli jõudnud abituuriumi.

Eriauhinnad

Alates sellest aastast toetab matemaatikaolümpiaadi kolme 1000-eurose stipendiumiga Lions Club Tallinn Eesti I. Statuudi järgi saavad selle gümnaasiumiastme kõigi klasside võitjad, esikoha jagamise korral läheb ka stipendium vastavas klassis jagamisele. Sel aastal esikoha jagamisi ette ei tulnud, stipendiumi teenisid Oliver-Matis Lill 12. klassist, Joonas Kalda 11. klassist ja Oliver Nisumaa 10. klassist.

Stipendiumi "Benoit Mandelbroti jälgedes" said Kaur Kristjuhan, Triinu Veeorg, Simmo Saan, Rasmus Kisel, Kristjan Kongas, Eva-Maria Tõnson, Elo Maria Pauman, Taavet Kalda, Joonas Jürgen Kisel ja Kaarel Hänni. Ilves-Extra eriauhinna said Triinu Veeorg ja Andres Unt.

Valikvõistlus

Valikvõistlus IMO võistkonna selgitamiseks toimus 21.–22. aprillil. Kutsutud oli 21 õpilast, kellest osales 19. Tavakohaselt järgis valikvõistlus IMO formaati: kahel päeval anti kummalgi lahendada 3 ülesannet, millest igaüks maksis 7 punkti.

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte
1.	Simmo Saan	Hugo Treffneri Gümnaasium	11.	24
2.	Joonas Kalda	Tallinna Reaalkool	11.	23
3.	Triinu Veeorg	Tallinna Reaalkool	11.	22
3.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	10.	22
5.	Kaarel Hänni	Tallinna Prantsuse Lütseum	8.	18
5.	Kristjan Kongas	Tallinna Reaalkool	10.	18
7.	Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	9.	17
8.	Oliver-Matis Lill	Tallinna Vanalinna Täiskasvanute Gümnaasium	12.	16
8.	Richard Luhtaru	Miina Härma Gümnaasium	7.	16
10.	Taavet Kalda	Gustav Adolfi Gümnaasium	9.	14
11.	Andres Unt	Tallinna Reaalkool	10.	13
12.	Mirjam Iher	Hugo Treffneri Gümnaasium	10.	11
12.	Kaur Kristjuhan	Hugo Treffneri Gümnaasium	12.	11
14.	Svenno Saan	Hugo Treffneri Gümnaasium	10.	10
15.	Jonatan Kalmus	Hugo Treffneri Gümnaasium	10.	9
16.	Markus Rene Pae	Gustav Adolfi Gümnaasium	10.	6
16.	Elo Maria Pauman	Hugo Treffneri Gümnaasium	10.	6
18.	Eva-Maria Tõnson	Hugo Treffneri Gümnaasium	10.	5
19.	Edward Erelt	Tallinna Reaalkool	10.	3

IMO võistkonda valiti Simmo Saan, Joonas Kalda, Triinu Veeorg, Oliver Nisumaa, Kaarel Hänni ja Joonas Jürgen Kisel. Kristjan Kongas jäeti välja, kuna ta plaanis samal aastal minna ka rahvusvahelisele füüsikaolümpiaadile ning 5. koht valikvõistlusel ei lubanud loota, et oma treeninguaega kahe aine vahel jagav Kristjan suudaks matemaatikas hästi esineda. Tagantjärele, teades ka võistkonna tulemusi IMOl, on otsuse tegijad seda olukorda kahetsenud. Asi oli selles, et valikvõistlusele juhtus seekord võrdlemisi ebaõnnestunud, lihtsapoolne ülesannete komplekt, mistõttu paremusjärjestus ei kajastanud õigesti õpilaste suutlikust just IMO tasemega ülesandeid lahendada. Muuhulgas sai Kristjan nulli 1. ülesande eest, ilma seda tõsiselt ründamata, mis aga oli tegelikkuses üks lihtsamaid (osalejate keskmine tulemus 3,4 punkti). See kogemus oli tõukeks, mis pani žüriid järgmisel aastal otsustama uue valikusüsteemi kasuks, kus võistkond selgitatakse kahe kahepäevase võistluse koondtulemuste järgi. Kaks IMO formaadis võistlust ühe asemel annab õpilaste valikuks adekvaatsema aluse, juhuse osakaal marginaliseerub.

Toome siin jutuksolnud 1. ülesande näitena ära.

> Imedemaal on iga riigi valitsuses täpselt a meest ja b naist, kus a ja b on fikseeritud naturaalarvud ning $b > 1$. Riikidevaheliste suhete arendamiseks moodustatakse valitsuste liikmetest kõikvõimalikud töörühmad, kuhu igast valitsusest kuulub täpselt üks esindaja ja kus naisi on vähemalt mingi fikseeritud mittenegatiivne arv n. Sama inimene võib kuuluda mitmesse töörühma. Leia kõik võimalused, mitu riiki saab olla Imedemaal, kui on teada, et erinevate töörühmade arv on algarv.

IMO

Rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad (IMO) toimus 3.–13. juulil Kaplinnas Lõuna-Aafrikas. Võistkonna saatjad olid TÜ arvutiteaduse instituudi dotsent Härmel Nestra ja Cambridge'i Ülikooli doktorant Heiki Niglas. Nagu ikka, anti kahel lahenduspäeval kummalgi lahendada 3 ülesannet.

Eesti võistkonna tulemused olid järgmised.

Nimi	Ül1	Ül2	Ül3	Ül4	Ül5	Ül6	Kokku	Koht	Tunnustus
Oliver Nisumaa	6	2	0	7	0	0	15	296.	diplom
Joonas Kalda	5	0	0	7	2	0	14	321.	diplom
Triinu Veeorg	7	2	0	3	2	0	14	321.	diplom
Simmo Saan	6	0	0	1	0	0	7	446.	
Joonas Jürgen Kisel	0	0	0	1	0	0	1	507.	
Kaarel Hänni	0	0	0	1	0	0	1	507.	

Medalist jäi Oliveril puudu vaid punkt. Vaadates vaid meie õpilaste tulemusi, ei tundu nende sooritus tervikuna eriti nõrgana, sest on täiesti tavapärane, et mõned meie õpilased võtab esmakordne IMO atmosfäär koos raskete seninägematute ülesannetega jalust ja nad saavad vaid mõne punkti, samas kui kolm õpilast 14–15 punktiga on päris korralik saavutus. Ometi jäi Eesti mitteametlikus riikide arvestuses võistlejate punktide summa alusel kõigi aegade madalaimale 74. kohale (kokku osales 101 maad). Paistab, et seekord olid lihtsad ülesanded 1 ja 4, samuti ülesanne 2, tavalisest pisut lihtsamad ja jõukohased laiemale hulgale osavõtjaskonnast, mistõttu meie õpilaste näiliselt korralik punktisumma ei olnud eriti konkurentsivõimeline. Riikide arvestuses esimeselt kohalt leiame Hiina, järgnesid väikeste vahedega Ameerika Ühendriigid, Taivan ja Venemaa ning juba suurema vahe järel Jaapan, Ukraina, Lõuna-Korea, Singapur.

IMOl on peaaegu alati üks kahest lihtsast ülesandest geomeetriavallast. Seetõttu on väga oluline, et õpilased geomeetriat niipalju valdaksid, et suudaksid selle ära lahendada. Seekord oli lihtne geomeetria teisel päeval (ül 4) ehk meie õpilased selles kahjuks kuigi edukad ei olnud. Tegu oli ülesandega, millel leidub sarnaste kolmnurkade abil üllatavalt lühike lahendus, kuid mida avastada nii lihtne ei ole.

> Teravnurkse kolmnurga ABC küljel BC asuvad sellised punktid P ja Q, et $\angle PAB = \angle BCA$ and $\angle CAQ = \angle ABC$. Punktid M ja N vastavalt sirgetel AP ja AQ on sellised, et P on lõigu AM keskpunkt ja Q on lõigu

AN keskpunkt. Tõesta, et sirged BM ja CN lõikuvad kolmnurga ABC ümberringjoonel.

Kui Triinu nägi pärast võistlust, kui lihtne geomeetriline lahendus on sel ülesandel, mille ründamisel trigonomeetriaga oli ta ise saavutanud vaid mõningast progressi, andis ta lubaduse tulla järgmisel aastal tagasi ja lahendada lihtne geomeetria ära. Etteruttavalt võib öelda, et oma lubaduse ta täitis.

Kaplinn on suurlinn Aafrika lõunatipu lähedal läände ulatuval neemel, mille territooriumile jääb kuulus Laudmägi ja mitmed teised mäed. Meie õpilased võtsid ühel õhtul kätte ja ronisid Laudmäe tippu. Vabalt ringi jalutamise eest vähemalt teatud piirkondades seal siiski hoiatati, sest kuritegevuse tase on kõrge, ja Soome vaatleja oligi langenud röövlite rünnaku ohvriks. Linnas oli kõikjal näha patrullimas korravalvureid, kes on valdavalt tursked mustanahalised mehed. Ülikoolilinnak, kus IMO osavõtjad majutati, oli väga tugevalt turvatud. See on teravas kontrastis Euroopa suurlinnadega, kus pole nii palju politseinikke näha. Kohalikud inimesed, kellega kokku puutusime, olid aga kõik väga sõbralikud.

Sügisene lahtine võistlus

Sügisene lahtine võistlus toimus 4. oktoobril ja nagu tavaks seitsmes paigas üle Eesti. Nooremas rühmas anti lahendada 6 ja vanemas 5 ülesannet, kusjuures noorem rühm oli tavakohaselt mõeldud 10. klassi õpilastele ja noorematele. "Balti Tee" võistkonna liikme kohta himustavad noored tulevad muidugi võistlema vanemasse rühma.

Noorem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Diplom
1.	Hendrik Vija	Miina Härma Gümn.	6.	29	I
1.	Aaro Kristjuhan	Hugo Treffneri Gümn.	10.	29	I
3.	Sullo Saan	Tartu Kivilinna Kool	8.	28	I
4.	Paul Kerner	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	10.	26	II

4.	Kati Iher	Tartu Descartes'i Kool	9.	26	II
6.	Tähvend Uustalu	Tallinna Reaalkool	10.	25	II
7.	Laura Olek	Tallinna Reaalkool	10.	23	III
7.	Carel Kuusk	Tallinna Reaalkool	10.	23	III
9.	Rasmus Jaagant	Hugo Treffneri Gümn.	10.	22	III
9.	Toomas Tennisberg	Tartu Kesklinna Kool	8.	22	III
9.	Mark Gerassimenko	Jõhvi Vene Gümn.	10.	22	III

Uue õppeaasta esimene lahtine võistlus lõhkas tõelise üllatuspommi: nooremas rühmas tuli võitjaks 6. klassi õpilane! Algul tekkis kahtlus, et andmete arvutisse sisestaja on teinud näpuvea, kuid kõik oli õige. Nii noort auhinnatut polnud meil varem esinenud, 7. klass tundus olevat piir.

Vanem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Auhind
1.	Kristjan Kongas	Tallinna Reaalkool	11.	31	I
2.	Joonas Kalda	Tallinna Reaalkool	12.	24	II
2.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	11.	24	II
4.	Triinu Veeorg	Tallinna Reaalkool	12.	23	II
5.	Richard Luhtaru	Miina Härma Gümn.	8.	21	II
6.	Taavet Kalda	Gustav Adolfi Gümn.	10.	18	III
7.	Svenno Saan	Hugo Treffneri Gümn.	11.	16	III
8.	Kaarel Hänni	Tallinna Prantsuse Lütseum	10.	15	III
9.	Andres Unt	Tallinna Reaalkool	11.	14	III
10.	Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	10.	14	III

"Balti Tee" võistkonda valiti lahtise võistluse tulemuste pingerea järgi vanema rühma 5 parimat. Noor Richard Luhtaru, kes oli aasta varem nooremas rühmas puhta töö teinud, pääses nüüd 8.

klassi õpilasena 11. ja 12. klassi õpilaste kõrval rahvusvahelisele võistlusele.

Tähelepanelik lugeja märkab, et Kaarel Hänni on klassi vahele jätnud. See ei ole viga tabelis. Tõepoolest läbis Kaarel eelmise õppeaastaga kaks klassi ja lõpetas 8. klassiga põhikooli ära.

"Balti Tee"

Võistkondlik matemaatikavõistlus "Balti Tee" toimus 6.–10. novembrini Vilniuses. Eesti võistkonda said alguses määratud Kristjan Kongas, Joonas Kalda, Oliver Nisumaa, Triinu Veeorg ja Richard Luhtaru. Ootamatult aga teatas Joonas oma loobumisest, et valmistuda Ameerika ülikoolide sisseastumiskatseteks. Tema asemel pääses Eestit esindama tema noorem vend Taavet. Võistkonna saatjad olid TÜ matemaatikadoktorant Oleg Košik ja informaatikatudeng Janno Veeorg.

Kui tavapäraseid "Balti Teel" osalevaid maid on 11, siis mõnikord kasutab korraldajamaa õigust kutsuda võistlusele külalisvõistkondi. Näiteks osalesid 2001 Saksamaal külalistena Iisraeli ja 2011 samuti Saksamaal Lõuna-Aafrika võistkond, 2005 Rootsis aga Belgia võistkond. Nagu aastal 2004, oli Leedu ka nüüd kutsunud külalistena "Balti Teele" Valgevene võistkonna. Eesti jäi 12 riigi seas 40 punktiga üleeelviimasele, 10. kohale.

Kuna võistkonnas olid enamuses rahvusvahelise võistluse kogemusega õpilased (Kristjan ja Taavet, kes polnud käinud IMOl, osalesid siiski aasta varem "Balti Teel"), siis olid ootused tegelikest tulemustest märksa kõrgemad. Ebaõnnestumise põhjused võisid olla psühholoogilist laadi ja seotud Joonase loobumisega. Juba võistlusele sõites valitsesid võistkonnas negatiivsed meeleolud, avaldati mõtteid nagu näiteks "seekord midagi head oodata ei ole", kostis kurtmist stiilis "oh oleks meil Joonas". Sellise häälestuse pealt ongi raske head sooritust teha.

Eesti pakutud ülesannetest aga jõudis seekord võistlusele koguni 3. Toome näitena algebraülesande 5, millel leidub elegantne lahendus läbi geomeetrilise interpretatsiooni. Ülesande autor on Cybernetica AS vanemteadur Jan Villemson.

> Positiivsete reaalarvude a, b, c, d korral kehtivad võrdused
>
> $$a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc \qquad \text{ja} \qquad a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$
>
> Leia avaldise $\frac{ab+cd}{ad+bc}$ kõik võimalikud väärtused.

Eesti võistkond teenis selle eest vaid 1 punkti, kuid pooled 12 võistkonnast lahendasid selle maksimumpunktidele.

Talvine lahtine võistlus

Talvisel lahtisel võistlusel muudeti järjekordselt formaati, andes sarnaselt nooremale rühmale ka vanemas rühmas 5 ülesande asemel 6. Kuna noorema rühma osalejate arvule oli suurem lihtsate ülesannete osakaal hästi mõjunud, siis otsustas žürii edaspidi ka vanemas rühmas lihtsaid ülesandeid rohkem pakkuda. Niisiis oli nüüd mõlemas rühmas võimalikuks maksimaalseks tulemuseks 42 punkti.

Noorem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Diplom
1.	Hartvig Tooming	Tallinna Prantsuse Lütseum	10.	40	I
2.	Rasmus Maide	Tallinna Reaalkool	10.	38	II
3.	Paul Kerner	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	10.	37	II
4.	Carel Kuusk	Tallinna Reaalkool	10.	36	II
4.	Toomas Tennisberg	Tartu Kesklinna Kool	8.	36	II
6.	Mihhail Lebedev	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	10.	35	III
6.	Rasmus Jaagant	Hugo Treffneri Gümn.	10.	35	III

8.	Frida Laigu	Gustav Adolfi Gümn.	10.	34	III
8.	Aaro Kristjuhan	Hugo Treffneri Gümn.	10.	34	III
8.	Gregor Eesmaa	Tartu Jaan Poska G.	10.	34	III

Tabeli 8. realt leiame Frida Laigu, kellest tänaseks on paljud Eesti inimesed kuulnud. Tegu on "Rakett 69" telemängu 6. hooaja võitjaga. Selle võiduni oli 2014 detsembris veel üle aasta aega. Peab ütlema, et edukuseks "Rakett 69" saates on vaja mitmekülgsust ja tehnilist taiplikkust. Tipptasemel olümpiaadilapsed seal silma ei paista. Ka Frida pole matemaatikaolümpiaadidel kunagi päris tippu jõudnud, kuid omas vanuserühmas kahekümne tugevama seas on stabiilselt. Säravamaid tulemusi on matemaatikavõistlustel näidanud Eva-Maria Tõnson, kes "Rakett 69" kolmandal hooajal jõudis esikolmikusse. Ka käesolevas artiklis käis tema nimi läbi (esineb lõppvooru 10. klassi auhinnatute tabelis).

Vanem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Diplom
1.	Joonas Kalda	Tallinna Reaalkool	12.	34	I
1.	Triinu Veeorg	Tallinna Reaalkool	12.	34	I
3.	Taavet Kalda	Gustav Adolfi Gümn.	10.	32	II
3.	Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	10.	32	II
5.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	11.	29	II
6.	Simmo Saan	Hugo Treffneri Gümn.	12.	26	III
7.	Aet Abramson	Tallinna Reaalkool	12.	25	III
8.	Vadim Šved	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	12.	23	III
8.	Hans Daniel Kaimre	Hugo Treffneri Gümn.	12.	23	III

Esikoha võitmiseks piisas 34 punktist, mis on 8 punkti võrra võimalikust vähem. Komplekti 6. ülesanne oli ebaõnnestunult raske, selle eest ei saanud keegi rohkem kui 1 punkti. Toome selle muidu üsna huvitava, lõbusa tekstiga ja informaatikapärase ülesande siin näiteks.

> Uhhuu hõimu huiked koosnevad ainult tähtedest U ja H; sõnavahesid ja kirjavahemärke ei kasutata. Hõim järgib tabu, mille järgi ei tohi huike ükski algusosa korduda vahetult selle algusosa järel. Näiteks huiked **UU**HUU ja **HUHU**U on keelatud, kuid UHHUH ja HUHHU on lubatud. Hõimupealik kontrollib iga uue huike lubatavust, võrreldes järjest selle algusosi pikkusega 1, 2, ... neile vahetult järgnevate niisama pikkade osadega tähthaaval vasakult paremale kuni esimese erinevuse leidmiseni. Mõistagi kontrollib ta ainult selliseid algusosi, mille pikkus ei ületa poolt kogu huike pikkusest. Olgu $l(H)$ tähtede arv huikes H ning $c(H)$ tähevõrdluste koguarv, mida pealik sooritab huike H kontrollimisel. Kas leidub selline lubatud huige H, mille korral $\frac{c(H)}{l(H)} > 100$?

Kokkuvõte

Aastat 2014 iseloomustab tugevate noorte esilekerkimine. Kui aasta varem nägime Richard Luhtaru tähelendu 6. klassi õpilasest piirkonnavooru võitjast jaanuaris kuni lahtise võistluse noorema rühma võitmiseni detsembris, siis 2014 jõudis Richard välja koguni "Balti Tee" võistkonda. Samas üllatas kõiki Hendrik Vija, kes tegi seda, millega ka Richard polnud hakkama saanud: võitis 6. klassi õpilasena lahtise võistluse noorema rühma. Väärib märkimist, et mõlemad õpilased on pärit samast koolist. Ei, mitte Tallinna Reaalkoolist ega Hugo Treffneri Gümnaasiumist, vaid Miina Härma Gümnaasiumist, mis pole üldse reaalkallakuga. Samast koolist on viimastel aastatel tulnud veelgi matemaatikataibuga noori nagu Loona Volke, Karl Paul Parmakson, Aaro Kristjuhan, Hannes Kuslap. Põhikooli lõpetamise järel läksid mitmed neist aga Hugo Treffneri Gümnaasiumi üle.

Kuidas läks Hendrikul, Richardil ja teistel edasi, saate teada, kui loete kokkuvõtteid järgmiste õppeaastate matemaatikavõistlustest.

Kokkuvõte õpilaste matemaatikavõistlustest aastal 2015

Oleg Košik
Tartu Ülikool

Aastal 2015 toimusid samad traditsioonilised matemaatikavõistlused nagu viimastel eelnevatel aastatel.

Eesti võistlused

Piirkonnavoor

Piirkonnavoor toimus 7. veebruaril tavakohaselt 7.–12. klasside õpilastele. Parimate tulemused esitame 7.–8. klasside osas, kellele olümpiaadi lõppvooru eraldi ei korraldata. Maksimaalne võimalik tulemus piirkonnavooru 7.–8. klassides oli 41 punkti.

7. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte
1.	Artur Avameri	Miina Härma Gümnaasium	39
1.	Laura Pau	Miina Härma Gümnaasium	39
1.	Tuuli Tiivel	Gustav Adolfi Gümnaasium	39
4.	Rasmus Saame	Tallinna Merekalda Kool	38
5.	Kertu Liisa Lepik	Miina Härma Gümnaasium	37
5.	Christian Roos	Loo Keskkool	37
7.	Konstantin Dukatš	Narva Keeltelütseum	36

8. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte
1.	Uku Jõgi	Ilmatsalu Põhikool	40
2.	Andres Kauri	Kehtna Põhikool	39
3.	Erki Külaots	Miina Härma Gümnaasium	37
3.	Toomas Tennisberg	Tartu Kesklinna Kool	37
3.	Rene Piik	Tallinna Reaalkool	37
6.	Hannes Kuslap	Miina Härma Gümnaasium	36

Lõppvoor

Lõppvoor toimus 4.–5. aprillil. Igast klassist oli võistlusele kutsutud umbes 25 õpilast üle Eesti, järgudiplomid antakse orienteeruvalt 10 parimale. Kõigis klassides oli võimalik saada kuni 35 punkti.

Traditsiooni kohaselt osales 9. klassi arvestuses ka kaks külalisvõistlejat Soomest.

9. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Järk
1.	Ingrid Räästas	Rakvere Gümnaasium	34	I
2.	Hendrik Vija (6. kl.)	Miina Härma Gümnaasium	32	I
3.	Kati Iher	Tartu Descartes'i Kool	30	II
4.	Joose Lehtinen	Forssan Keskuskoulu	29	II
4.	Karl Paul Parmakson (8. kl.)	Miina Härma Gümnaasium	29	II
6.	Loona Volke	Miina Härma Gümnaasium	28	III
6.	Joosep Pärn	Tallinna Inglise Kolledž	28	III
6.	Joosep Kaimre	Tartu Kivilinna Kool	28	III
9.	Maret Sõmer	Kärdla Ühisgümnaasium	27	III
9.	Kristjan Kõiv (8. kl.)	Rapla Vesiroosi Gümnaasium	27	III

10. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Järk
1.	Richard Luhtaru (8. kl)	Miina Härma Gümnaasium	35	I
2.	Taavet Kalda	Gustav Adolfi Gümnaasium	34	I
2.	Kaarel Hänni	Tallinna Reaalkool	34	I
4.	Aaro Kristjuhan	Hugo Treffneri Gümnaasium	30	II
5.	Tähvend Uustalu	Tallinna Reaalkool	29	II
6.	Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	28	III
7.	Frida Laigu	Gustav Adolfi Gümnaasium	27	III
7.	Carel Kuusk	Tallinna Reaalkool	27	III
7.	Karolina Tammemaa	Nõo Reaalgümnaasium	27	III
7.	Hartvig Tooming	Tallinna Prantsuse Lütseum	27	III
7.	Mihhail Lebedev	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	27	III

11. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Järk
1.	Kristjan Kongas	Tallinna Reaalkool	33	I
2.	Andres Unt	Tallinna Reaalkool	32	I
3.	Mirjam Iher	Hugo Treffneri Gümnaasium	26	II
3.	Markus Rene Pae	Gustav Adolfi Gümnaasium	26	II
5.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	25	II
5.	Taavet Kalda (10. kl.)	Gustav Adolfi Gümnaasium	25	II
7.	Alfred Saidlo	Tallinna Reaalkool	21	III
7.	Svenno Saan	Hugo Treffneri Gümnaasium	21	III

12. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Järk
1.	Triinu Veeorg	Tallinna Reaalkool	31	I
2.	Joonas Kalda	Tallinna Reaalkool	22	II
3.	Tiit Hendrik Piibeleht	Gustav Adolfi Gümnaasium	21	II
4.	Toom Lõhmus	Hugo Treffneri Gümnaasium	19	II

5.	Simmo Saan	Hugo Treffneri Gümnaasium	17	III
6.	Anti Kaar	Tallinna Reaalkool	16	III
7.	Hans Daniel Kaimre	Hugo Treffneri Gümnaasium	14	III
8.	Vadim Šved	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	13	III

Eriauhinnad

Nagu eelmiselgi aastal pani gümnaasiumi kolme klassi võitjatele Lions Club Tallinn Eesti välja 1000-eurose stipendiumi. Nii said 12. klassis selle Triinu Veeorg, 11. klassis Kristjan Kongas, aga 10. klassis alles 8. klassis õppiv Richard Luhtaru.

Stipendiumi "Benoit Mandelbroti jälgedes", mille pani välja Swedbanki juhatuse esimees Robert Kitt, pälvisid Andres Unt, Taavet Kalda, Kaarel Hänni, Ingrid Räästas ning 9. klassi arvetuses teiseks tulnud 6. klassi õpilane Hendrik Vija. Neist sai igaüks 150 eurot.

Selle õppeaasta kahe lahtise võistluse kokkuvõttes parimad nooremas ja vanemas rühmas said viimast korda eriauhinnad aktsiaseltsilt Ilves-Extra. Need pälvisid vastavalt Aaro Kristjuhan ja Joonas Kalda. Matemaatikaolümpiaadi pikaaaegne toetaja Ilves-Extra lõpetas kahjuks järgmisel aastal oma tegevuse.

Lahtised võistlused

Lahtised võistlused toimusid 26. septembril ja 13. detsembril, 7 kohas üle Eesti. Kui varasematel aastatel toimus sügisene lahtine võistlus alati oktoobri esimesel laupäeval, siis sellest aastast otsustati seda võistlust hakata korraldama septembri viimasel laupäeval. Põhjusi oli kaks. Ühelt poolt toimuvad oktoobri esimesel laupäeval Põhja-Ameerika ülikoolide sisseastumiskatsed, mis muutusid tugevamate õpilaste hulgas viimastel aastatel populaarseteks. Teiseks aga soovivad Balti Tee võistluse korraldajad võimalikult varakult teada osalejate nimesid, ning varasem võistluse aeg aitab sellele kaasa.

Nagu tavaks, võisteldi kahes vanuseastmes – nooremas ja vanemas rühmas. Nooremas tohivad võistelda kuni 10. klassi õpilased, vanemas aga kõik huvilised. Sel aastal anti mõlemal võistlusel lahendamiseks nii nooremas kui vanemas rühmas 6 ülesannet, maksimaalne võimalik punktisumma oli 42 punkti. Nende 6 ülesande hulgas on 2 esimest ülesannet eeldatavalt teistest lihtsamad ning jõukohased enamikule osalejatele.

Lihtsate ülesannete sissetoomine avaldas positiivset mõju osalejate arvule ja nii osales lahtistel võistlustel viimase 9 aasta rekordarv osalejaid, nii sügisesel kui talvisel võistlusel. Sügisesel lahtisel võistlusel osales 176 õpilast nooremas rühmas ning 109 vanemas. Talvisel lahtisel oli nooremas rühmas osalejaid 120 ning vanemas 76. Märgime, et osalejate arvu langus talvisel võistlusel on tavapärane ning võib olla seletatav jõulueelseks ajaks kogunenud kooliväsimusega.

Sügisene võistlus, noorem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Järk
1.	Kati Iher	Hugo Treffneri Gümn.	10	42	I
2.	Karl Paul Parmakson	Miina Härma Gümn.	9	41	I
3.	Nikita Leo	Gustav Adolfi Gümn.	10	39	II
4.	Hannes Kuslap	Miina Härma Gümn.	9	35	II
5.	Toomas Tennisberg	Tartu Kesklinna Kool	9	34	II
6.	Artur Avameri	Miina Härma Gümn.	8	30	III
6.	Sullo Saan	Tartu Kivilinna Kool	9	30	III
8.	Joosep Kaimre	Hugo Treffneri Gümn.	10	29	III
8.	Roman Oleinik	Narva Pähklimäe Gümn.	10	29	III
10.	Peter Alex Mahhov	Tallinna Inglise Kolledž	10	28	III

Sügisene võistlus, vanem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Järk
1.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	12	42	I
1.	Kristjan Kongas	Tallinna Reaalkool	12	42	I
1.	Kaarel Hänni	Tallinna Reaalkool	11	42	I

1.	Richard Luhtaru	Miina Härma Gümn.	9	42	I
5.	Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	11	40	II
6.	Hendrik Vija	Miina Härma Gümn.	8	36	II
7.	Taavet Kalda	Tallinna Reaalkool	11	34	II
8.	Hartvig Tooming	Tallinna Prantsuse Lütseum	11	32	III
8.	Tähvend Uustalu	Tallinna Reaalkool	11	32	III
10.	Andres Unt	Tallinna Reaalkool	12	31	III
10.	Mirjam Iher	Hugo Treffneri Gümn.	12	31	III

Talvine võistlus, noorem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Järk
1.	Kati Iher	Hugo Treffneri Gümn.	10	42	I
2.	Kristjan Kõiv	Rapla Vesiroosi Gümn.	9	39	II
3.	Loona Volke	Hugo Treffneri Gümn.	10	38	II
4.	Karl Paul Parmakson	Miina Härma Gümn.	9	36	II
5.	Nikita Leo	Gustav Adolfi Gümn.	10	34	III
5.	Roman Oleinik	Narva Pähklimäe Gümn.	10	34	III
7.	Konstantin Dukatš	Narva Keeltelütseum	8	32	III
8.	Toomas Tennisberg	Tartu Kesklinna Kool	9	31	III
8.	Silvia Hiie Aabloo	Hugo Treffneri Gümn.	10	31	III
8.	Karl Viik	Saaremaa Ühisgümn.	10	31	III

Talvine võistlus, vanem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Järk
1.	Richard Luhtaru	Miina Härma Gümn.	9	41	I
2.	Kristjan Kongas	Tallinna Reaalkool	12	40	I
3.	Taavet Kalda	Tallinna Reaalkool	11	39	I
4.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	12	36	II

4.	Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	11	36	II
6.	Kaarel Hänni	Tallinna Reaalkool	11	33	II
7.	Svenno Saan	Hugo Treffneri Gümn.	12	31	II
8.	Rasmus Jaagant	Hugo Treffneri Gümn.	11	26	III
8.	Hendrik Vija	Miina Härma Gümn.	8	26	III

Rahvusvahelised võistlused

Soome olümpiaad

Kahel Eesti põhikooli lõpuklassi õpilasel on alates 1992. aastast olnud võimalus osaleda Soome põhikoolide matemaatikavõistluse lõppvõistlusel, omakorda kaks Soome õpilast osalevad meie olümpiaadil 9. klassi arvestuses. Seekord peeti Soome põhikooli olümpiaadi lõppvoor 30. jaanuaril Helsingis. Eesti õpilastest osalesid Kati Iher (Tartu Descartes'i Kool) ning Joosep Pärn (Tallinna Inglise Kolledž), kes tulid vastavalt 3. ja 4. kohale. Õpilaste saatjaks oli TÜ matemaatika instituudi lektor Hannes Jukk.

IMO valikvõistlus

Rahvusvahelise matemaatikaolümpiaadi valikvõistlus toimus alates sellest aastast kahevoorulisena: 16.–17. aprillil ja 6.–7. mail. Esimeses voorus osales 20 õpilast, kellest teisse vooru kutsuti 10 parimat. Lisaks lubati osaleda teises voorus kahel õpilasel, kes ei saanud mõjuval põhjusel osaleda esimeses voorus. Mõlemad voorud järgisid IMO formaati: kahel päeval anti kummalgi lahendada 3 ülesannet, millest igaüks maksis 7 punkti.

Otsustasime teha valikvõistluse kahevoorulisena kahel põhjusel. Esiteks, pikem valikvõistlus vähendab oluliselt juhuslikkust, mis tihti kaasnes vaid 6 ülesandega, ning annab võimaluse valida võistkond tuginedes selle tulemustele, jättes kõrvale subjektiivse varasemate võistluste arvestamise. Teiseks aga pakub teine voor õpilastele täiendava korralikul tasemel reaalse võistluskogemuse, mida ei saa luua treeningvõistluste abil.

Nimi	Kool	Klass	I voor	II voor	Kokku
Joonas Kalda	Tallinna Reaalkool	12	19	34	53
Triinu Veeorg	Tallinna Reaalkool	12	24	26	50
Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	11	17	24	41
Richard Luhtaru	Miina Härma Gümn.	8	18	15	33
Simmo Saan	Hugo Treffneri Gümn.	12	10	16	26
Andres Unt	Tallinna Reaalkool	11	17	9	26
Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	10	10	15	25
Kaarel Hänni	Tallinna Reaalkool	10	21	4	25
Tähvend Uustalu	Tallinna Reaalkool	10	16	2	18
Mirjam Iher	Hugo Treffneri Gümn.	11	12	5	17
Kristjan Kongas	Tallinna Reaalkool	11	-	16	-

Märgime, et Kaarel Hänni osales teises voorus ainult ühel päeval, kuivõrd eelistas sel aastal minna matemaatikaga samal ajal toimunud rahvusvahelisele füüsikaolümpiaadile. Märgime etterutatavalt, et kahel järgmisel aastal otsustas Kaarel taas matemaatika kasuks. Ka Kristjan Kongas eelistas osalemist füüsikaolümpiaadil.

IMO võistkonda said Joonas Kalda, Triinu Veeorg, Richard Luhtaru, Oliver Nisumaa, Simmo Saan ja Andres Unt.

IMO

Rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad (IMO) toimus 8.–16. juulil Tai põhjaosas Chiang Mais. Võistkonna juhendajad olid TÜ matemaatika instituudi dotsent Urve Kangro ning värskelt TÜ matemaatika instituudis doktorikraadi kaitsnud Oleg Košik. Võistlus toimus tavapärases formaadis (kahel päeval kummalgi 3 ülesannet).

Nimi	Ül 1	Ül 2	Ül 3	Ül 4	Ül 5	Ül 6	Kokku	Koht	Autasu
Joonas Kalda	7	0	0	7	0	1	15	217	pronksmedal
Triinu Veeorg	4	0	0	7	2	0	13	283	diplom
Oliver Nisumaa	7	1	0	0	1	0	9	365	diplom
Richard Luhtaru	7	0	0	0	0	0	7	420	diplom

Simmo Saan	2	0	0	0	3	0	5	449
Andres Unt	1	0	0	0	1	0	2	508

Väga õnnetult läks Triinul, kellel jäi medalist puudu vaid 1 punkt, kusjuures tervelt kahes ülesandes kaotas ta punkti üsna õnnetul kombel. Kokku osales 577 õpilast 104 riigist. Mitteametlikus riikide järjestuses tuli Eesti 70. kohale.

Esitame siin ülesande 1, mis oli võistluskomplekti üks ilusamaid.

Ülesanne. Ütleme, et tasandi punktide lõplik hulk $\mathcal{S}$ on *tasakaalus*, kui hulga $\mathcal{S}$ iga kahe erineva punkti A ja B korral leidub selline hulga $\mathcal{S}$ punkt C, et $AC = BC$. Ütleme, et hulk $\mathcal{S}$ on *keskpunktideta*, kui hulga $\mathcal{S}$ mitte ühegi kolme erineva punkti A, B ja C korral ei leidu sellist hulga $\mathcal{S}$ punkti P, mille korral $PA = PB = PC$.

(a) Näidata, et iga täisarvu $n \geqslant 3$ korral leidub n punktist koosnev tasakaalus hulk.

(b) Leida kõik sellised täisarvud $n \geqslant 3$, mille korral leidub n punktist koosnev keskpunktideta tasakaalus hulk.

"Balti Tee"

Matemaatikavõistlus "Balti Tee" toimus 5.–9.11 Stockholmis. Igat osalevat riiki esindab sel võistlusel viiest õpilasest koosnev võistkond, kes lahendab ülesandeid koos ja esitab igale ülesandele ühe lahenduse. Eesti võistkonda kuulusid Kristjan Kongas, Oliver Nisumaa, Richard Luhtaru, Kaarel Hänni ja Joonas Jürgen Kisel. Võistkonna juhendajateks olid TÜ matemaatika instituudi õppejõud Oleg Košik ja sama instituudi 3. aasta üliõpilane Janno Veeorg.

Võistkond valiti sügisese lahtise võistluse vanema rühma ning eelneva õppeaasta võistluste tulemuste põhjal.

Sel aastal osalesid kõik 11 traditsioonilist riiki, lisaks külalisena tugev Holland. Saksamaa on tavapäraselt esindatud põhjapoolsete liidumaadega.

Meie õpilased saavutasid suurepärase 3. koha, jõudes esikolmikusse esmakordselt peale 2003. aastat. Märkimisväärne oli ka Hollandi edestamine, sest Holland oli rahvusvahelisel matemaatikaolümpiaadil viimastel aastatel Euroopa riikede seas paremate hulgas, ning juhendajate kinnitusel osaleti oma parimas koosseisus.

Meie edu tagas kõigi õpilaste ühtne panus lõpptulemusse, kellelgi võistlus ei ebaõnnestunud. Lahendati ära kõik jõukohased ülesanded, aga ka mõni raskem. Peab tunnistama, et selline tulemus tuli nii õpilastele kui juhendajatele suure, aga muidugi väga meeldiva üllatusena.

Koht	Võistkond	Punkte
1.	Peterburi	83
2.	Poola	80
3.	Eesti	65
4.	Holland	62
5.	Rootsi	60
6.	Leedu	56
6.	Saksamaa	56
8.	Taani	44
9.	Soome	40
10.	Norra	38
11.	Island	37
12.	Läti	36

Olümpiaadi lõpetamine toimus Stockholmi uhkes raekojas, saalis, kus igaaastaselt toimub Nobeli preemia laureaatide pidulik bankett. Üritusele lisasid kaalu Stockholmi linnapea ning Rootsi haridusministri osavõtt. Isegi rahvuvaheline matemaatikaolümpiaad ei saa mõnikord uhkustada nii kõrgete külaliste tähelepanuga.

Esitame siin algebra ülesannete hulgast kõige raskema. Meie õpilased lahendasid selle ühena kahest võistkonnast maksimumpunktidele.

Ülesanne. Olgu $n > 1$ täisarv. Leia kõik mittekonstantsed reaalarvulised polünoomid $P(x)$, mis iga reaalarvu x korral rahuldavad võrdust

$$P(x)P(x^2)P(x^3)\cdots P(x^n) = P\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right).$$

Kokkuvõte õpilaste matemaatikavõistlustest aastal 2016

Oleg Košik
Tartu Ülikool

Aastal 2016 toimusid samad traditsioonilised matemaatikavõistlused nagu viimastel eelnevatel aastatel.

Eesti võistlused

Piirkonnavoor

Piirkonnavoor toimus 30. jaanuaril tavakohaselt 7.–12. klasside õpilastele. Parimate tulemused esitame 7.–8. klasside osas, kellele olümpiaadi lõppvooru eraldi ei korraldata. Maksimaalne võimalik tulemus piirkonnavooru 7.–8. klassides oli 41 punkti.

7. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte
1.	Andres Sõmer	Kärdla Ühisgümnaasium	41
1.	Nikita Maširin	Tallinna Reaalkool	41
1.	Martin Rahe	Tallinna Reaalkool	41
4.	Hannes Hirmat	Tallinna Reaalkool	39
4.	Richard Friedrichs	Jakob Westholmi Gümnaasium	39
6.	Oliver Tennisberg (6. kl)	Miina Härma Gümnaasium	38
7.	Mikk Saarse	Pärnu Kuninga Tänava Põhikool	37
7.	Valeria Karpova	Tallinna Kesklinna Vene Gümn.	37

8. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte
1.	Artur Avameri	Miina Härma Gümnaasium	41
1.	Siim Kruusimäe	Tallinna Laagna Gümnaasium	41

3.	Daniil Vaino	Narva Keeltelütseum	38
4.	Tuule Tars	Tartu Hansa Kool	37
4.	Hanna–Riia Allas	Tartu Veeriku Kool	37
6.	Mirjam Jesmin	Tartu Kesklinna Kool	36
6.	Kaarel Kivisalu	Tallinna Reaalkool	36
6.	Kaarel Paal	Tallinna Reaalkool	36

Lõppvoor

Lõppvoor toimus 2.–3. aprillil. Igast klassist oli võistlusele kutsutud umbes 25 õpilast üle Eesti, neist antakse järgudiplomid orienteeruvalt 10 parimale. Kõigis klassides oli maksimaalseks võimalikuks tulemuseks 35 punkti, mis tähendab 7 punkti iga ülesande eest.

Traditsiooni kohaselt osales 9. klassi arvestuses ka kaks külalisvõistlejat Soomest.

9. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Järk
1.	Toomas Tennisberg	Tartu Kesklinna Kool	28	I
2.	Konstantin Dukatš (8. kl)	Narva Keeltelütseum	26	II
3.	Uku Hannes Arismaa	Tallinna Inglise Kolledž	25	II
4.	Hannes Kuslap	Miina Härma Gümnaasium	23	III
4.	Jan Erik Alliksaar	Saue Gümnaasium	23	III
6.	Erki Külaots	Miina Härma Gümnaasium	22	III
7.	Annika Jaakson	Parksepa Keskkool	22	III
8.	Artur Avameri (8. kl)	Miina Härma Gümnaasium	21	III
8.	Daniil Vaino (8. kl)	Narva Keeltelütseum	21	III
8.	Oliver Tennisberg (6. kl)	Miina Härma Gümnaasium	21	III

10. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Järk
1.	Richard Luhtaru (9. kl)	Miina Härma Gümn.	31	I
1.	Karl Paul Parmakson (9. kl)	Miina Härma Gümn.	31	I
3.	Kati Iher	Hugo Treffneri Gümn.	30	I
4.	Roman Oleinik	Narva Pähklimäe Gümn.	28	II
5.	Loona Volke	Hugo Treffneri Gümn.	27	II
5.	Martin Širokov	Tallinna Mustamäe Humanitaargümnaasium	27	II
7.	Kristina Koch	Hugo Treffneri Gümn.	25	III
7.	Daniil Lepkin	Tallinna Õismäe Vene Lütseum	25	III
7.	Adrian Kirikal	Tallinna Reaalkool	25	III
7.	Joosep Kaimre	Hugo Treffneri Gümn.	25	III
7.	Triin Mirjam Tark	Hugo Treffneri Gümn.	25	III

11. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Järk
1.	Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	34	I
2.	Hendrik Vija (8. kl)	Miina Härma Gümnaasium	29	II
2.	Hartvig Tooming	Tallinna Prantsuse Lütseum	29	II
4.	Kaarel Hänni	Tallinna Reaalkool	28	II
4.	Taavet Kalda	Tallinna Reaalkool	28	II
4.	Karin Niinemets	Viljandi Gümnaasium	28	II
7.	Tähvend Uustalu	Tallinna Reaalkool	26	III
8.	Rasmus Jaagant	Hugo Treffneri Gümnaasium	25	III

12. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Järk
1.	Andres Unt	Tallinna Reaalkool	35	I
2.	Kristjan Kongas	Tallinna Reaalkool	34	I

3.	Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	32	I
4.	Kaarel Hänni (11. kl)	Tallinna Reaalkool	28	II
5.	Svenno Saan	Hugo Treffneri Gümnaasium	26	II
6.	Mirjam Iher	Hugo Treffneri Gümnaasium	20	III
7.	Markus Rene Pae	Gustav Adolfi Gümnaasium	17	III
7.	Ilja Zebergs	Tallinna Reaalkool	17	III
9.	Edward Erelt	Tallinna Reaalkool	16	III

Eriauhinnad

Tavakohaselt oli kolme gümnaasiumi klassi võitjatele ette nähtud 1000-eurone stipendium, mille pani välja Lions Club Tallinn Eesti I. Nii said 12. klassis selle Andres Unt ning 11. klassis Joonas Jürgen Kisel. 10. klassis läks aga stipendium jagamisele kahe 9. klassi õpilase vahel, kelleks olid Richard Luhtaru ja Karl Paul Parmakson.

Stipendiumi "Benoit Mandelbroti jälgedes", mille pani välja Swedbanki juhatuse esimees Robert Kitt, pälvisid Toomas Tennisberg, Kristjan Kongas, Oliver Nisumaa ning Kati Iher. Toomas sai 9. klassi võitjana 300 eurot, ülejäänutest sai igaüks 150 eurot.

Kahe selle õppeaasta lahtise võistluse kokkuvõttes parimale nooremas ja vanemas rühmas anti lahtiste võistluse võitjakarikas (varasema Ilves-Extra auhinna asemel). Nende omanikuks said Richard Luhtaru ja Kati Iher.

Lahtised võistlused

Lahtised võistlused toimusid 24. septembril ja 17. detsembril, 7 kohas üle Eesti. Nagu tavaks, võisteldi kahes vanuseastmes – nooremas ja vanemas rühmas. Nooremas tohivad võistelda kuni 10. klassi õpilased, vanemas aga kõik huvilised. Lahendamiseks anti nii nooremas kui vanemas rühmas 6 ülesannet, maksimaalne võimalik punktisumma oli 42 punkti.

Sügisesel lahtisel võistlusel osales 124 õpilast nooremas rühmas ning 101 vanemas. Talvisel lahtisel võistlusel osales nooremas rühmas 119 õpilast ning vanemas 67.

Sügisene võistlus, noorem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Järk
1.	Kaarel Kivisalu	Tallinna Reaalkool	9	42	I
2.	Tuuli Tiivel	Gustav Adolfi Gümn.	9	38	II
3.	Daniil Vaino	Narva Keeltelütseum	9	36	II
4.	Kristjan Kõiv	Tallinna Reaalkool	10	35	II
4.	Sullo Saan	Hugo Treffneri Gümn.	10	35	II
6.	Karoliina Inno	Tallinna Reaalkool	10	34	III
7.	Uku Hannes Arismaa	Tallinna Reaalkool	10	33	III
7.	Kaarel Kangro	Hugo Treffneri Gümn.	10	33	III
7.	Semjon Kravtšenko	Kohtla-Järve Järve Vene Gümnaasium	10	33	III
10.	Ellen Leib	Hugo Treffneri Gümn.	10	32	III
10.	Maria Rizo	Narva Keeltelütseum	10	32	III

Sügisene võistlus, vanem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Järk
1.	Richard Luhtaru	Hugo Treffneri Gümn.	10	41	I
2.	Kaarel Hänni	Tallinna Reaalkool	12	36	II
3.	Aaro Kristjuhan	Hugo Treffneri Gümn.	12	34	II
3.	Taavet Kalda	Tallinna Reaalkool	12	34	II
5.	Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	12	33	III
6.	Toomas Tennisberg	Hugo Treffneri Gümn.	10	32	III
6.	Roman Oleinik	Narva Pähklimäe Gümnaasium	11	32	III
8.	Hartvig Tooming	Tallinna Prantsuse Lütseum	12	31	III
8.	Hendrik Vija	Miina Härma Gümn.	9	31	III
10.	Nikita Leo	Gustav Adolfi Gümn.	11	30	III

Talvine võistlus, noorem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Järk
1.	Daniil Vaino	Narva Keeltelütseum	9	37	I
2.	Hannes Kuslap	Hugo Treffneri Gümn.	10	36	I
3.	Sullo Saan	Hugo Treffneri Gümn.	10	35	I
4.	Uku Hannes Arismaa	Tallinna Reaalkool	10	33	II
4.	Kaarel Kivisalu	Tallinna Reaalkool	9	33	II
4.	Joosep Näks	Tallinna Reaalkool	10	33	II
4.	Artur Avameri	Miina Härma Gümn.	9	33	II
4.	Uku Jõgi	Tartu Jaan Poska Gümn.	10	33	II
9.	Kirke Joamets	Hugo Treffneri Gümn.	10	31	III
9.	Andres Alumets	Sauga Põhikool	8	31	III

Talvine võistlus, vanem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Järk
1.	Richard Luhtaru	Hugo Treffneri Gümn.	10	42	I
1.	Hendrik Vija	Miina Härma Gümn.	9	42	I
3.	Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	12	40	I
4.	Tähvend Uustalu	Tallinna Reaalkool	12	30	II
5.	Toomas Tennisberg	Hugo Treffneri Gümn.	10	27	III
5.	Roman Oleinik	Narva Pähklimäe Gümn.	11	27	III
7.	Silvia Hiie Aabloo	Hugo Treffneri Gümn.	11	26	III
8.	Hartvig Tooming	Tallinna Prantsuse Lütseum	12	25	III
9.	Martin Širokov	Tallinna Tehnikagümn.	11	24	III
9.	Rasmus Jaagant	Hugo Treffneri Gümn.	12	24	III

Rahvusvahelised võistlused

Soome olümpiaad

Tavakohaselt osalesid kaks 9. klassi õpilast Soome põhikooli olümpiaadi lõppvoorus, mis toimus 22. jaanuaril Helsingis. Sel aastal tõid meie õpilased Richard Luhtaru ja Karl Paul Parmakson (mõlemad Miina Härma Gümnaasium) koju kaksikvõidu, seejuures läks esikoht nende vahel jagamisele, samamoodi nagu hiljem meie enda olümpiaadi lõppvoorus. Õpilaste saatjaks oli TÜ matemaatika instituudi lektor Hannes Jukk.

IMO valikvõistlus

Rahvusvahelise matemaatikaolümpiaadi valikvõistlus toimus nagu eelmiselgi aastal kahevoorulisena: 14.–15. aprillil ja 21.–22. aprillil. Esimeses voorus osales 22 õpilast, kellest teisse vooru kutsuti 12 parimat. Tavakohaselt järgisid mõlemad voorud IMO formaati: kahel päeval anti kummalgi lahendada 3 ülesannet, millest igaüks maksis 7 punkti.

Nimi	Kool	Klass	I voor	II voor	Kokku
Kristjan Kongas	Tallinna Reaalkool	12	28	31	59
Richard Luhtaru	Miina Härma Gümn.	9	26	31	57
Oliver Nisumaa	Tallinna Reaalkool	12	33	14	47
Hendrik Vija	Miina Härma Gümn.	8	21	23	44
Joonas Jürgen Kisel	Vanalinna Hariduskolleegium	11	18	25	43
Kaarel Hänni	Tallinna Reaalkool	11	19	22	41
Taavet Kalda	Tallinna Reaalkool	11	24	14	38
Andres Unt	Tallinna Reaalkool	12	15	15	30
Toomas Tennisberg	Tartu Kesklinna Kool	9	14	9	23
Hartvig Tooming	Tallinna Prantsuse Lütseum	11	12	9	21
Tähvend Uustalu	Tallinna Reaalkool	11	16	2	18
Kati Iher	Hugo Treffneri Gümn.	10	16	2	18

IMO võistkonda said Richard Luhtaru, Oliver Nisumaa, Hendrik Vija, Joonas Jürgen Kisel ning Andres Unt. Kohast võistkonnas loobusid Kristjan Kongas ning ka esimene varuliige Taavet Kalda samal ajal toimunud rahvusvahelise füüsikaolümpiaadi tõttu. Seejuures Kristjan kaalus väga pikalt osalemist matemaatikaolümpiaadil, sest see oli tema jaoks viimaseks võimaluseks osaleda IMO-l, kus ta varem ei käinud. Siiski otsustas ta lõpuks ka sel aasta minna füüsikasse, et püüda seal kuldmedalit, mida tal nelja varasema korraga ei õnnestunud kätte saada. Paraku jäi seegi kord see talle püüdmatuks, ning tuli leppida hõbedaga.

IMO

Rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad (IMO) toimus 9.–16. juulil Hongkongis. Võistkonna juhendajad olid TÜ tehnoloogiainstituudi teadur Oleg Košik ning Cambridge'i ülikooli doktorant Heiki Niglas. Võistlus toimus tavapärases formaadis (kahel päeval kummalgi 3 ülesannet).

Nimi	Ül1	Ül2	Ül3	Ül4	Ül5	Ül6	Kokku	Koht	Autasu
Oliver Nisumaa	7	2	0	7	0	0	16	253	pronksmedal
Joonas Jürgen Kisel	5	0	0	7	2	0	14	312	diplom
Richard Luhtaru	7	0	0	7	0	0	14	312	diplom
Hendrik Vija	5	0	0	6	0	0	11	379	
Kaarel Hänni	7	0	0	1	1	0	9	409	diplom
Andres Unt	0	1	0	0	2	0	3	501	

Kokku osales 602 õpilast 109 riigist. Mitteametlikus riikide järjestuses tuli Eesti 61. kohale, mida võib pidada paljude aastate keskmiseks.

Kui tavaliselt on IMO-l ülesanne 6 kõige raskem, siis sel aastal oli see üllatavalt jõukohane. Esitame siin selle ilusa ülesande.

Ülesanne. Tasandil on $n \geqslant 2$ sirglõiku, millest iga kaks lõikuvad sisepunktides, kuid ükski kolmik ei lõiku ühes punktis. Joosepil tuleb valida iga sirglõigu üks otspunkt ning paigutada sinna konn, näoga teise otspunkti poole. Seejärel ta plaksutab käsi $n-1$ korda. Iga kord kui ta plaksutab, hüppab iga konn koheselt edasi järgmisse lõikepunkti enda lõigul. Konnad ei muuda kunagi oma hüpete suunda. Joosep soovib paigutada konnad sellisel viisil, et ükski kaks neist ei satu kunagi samal hetkel samasse lõikepunkti.

(a) Tõesta, et Joosep saab alati täita oma soovi, kui n on paaritu.

(b) Tõesta, et Joosep ei saa kunagi täita oma soovi, kui n on paaris.

"Balti Tee"

Võistkondlik Põhja-Euroopa maid hõlmav matemaatikavõistlus "Balti Tee" toimus 3.–7. novembril Soomes Oulus. Igat osalevat riiki esindab sel võistlusel viiest õpilasest koosnev võistkond, kes lahendab ülesandeid koos ja esitab igale ülesandele ühe lahenduse. Eesti võistkonda kuulusid Richard Luhtaru, Kaarel Hänni, Joonas Jürgen Kisel, Taavet Kalda ja Hendrik Vija. Võistkonna juhendajad olid TÜ tehnoloogiainstituudi teadur Oleg Košik ja TÜ arvutiteaduse instituudi magistrant Janno Veeorg.

Võistkond valiti sügisese lahtise võistluse vanema rühma ning eelneva õppeaasta võistluste tulemuste põhjal.

Sel aastal osalesid 11 traditsioonilist riiki, Eesti tuli nende hulgas 6. kohale. Ühelt poolt võib tulemus tunduda tagasiminekuga võrreldes mulluse 3. kohaga, teiselt poolt oli viimase kümne aasta jooksul meie jaoks alles kolmas kord jõuda esikuuikusse. Samuti olime oma tulemusega lähemal esiotsa riikidele kui tagumisele otsale, millega kuulusime "kõrgemasse liigasse".

Koht	Võistkond	Punkte
1.	Poola	95
2.	Peterburi	95
3.	Rootsi	89
4.	Leedu	87
5.	Saksamaa	75
6.	Eesti	70
7.	Taani	59
8.	Läti	50
9.	Soome	45
10.	Norra	37
11.	Island	20

Sel aastal oli võistluskomplektis 3 Eesti pakutud ülesannet. Esitame siin ühe neist, mille autoriks on Loughborough' Ülikooli doktorant Erik Paemurru.

Ülesanne. Leia kõik reaalarvud a, mille jaoks leidub mittekonstantne funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, mis kõigi $x \in \mathbb{R}$ korral rahuldab kahte järgmist võrrandit:

i) $f(ax) = a^2 f(x)$ ja

ii) $f(f(x)) = a\,f(x)$.

Tartu Ülikooli üliõpilaste olümpiaadid

Aleksei Lissitsin
Tartu Ülikool

Igal aastal alates 1996. a korraldatakse Tartu Ülikoolis matemaatika olümpiaad (varem nimetati seda lihtsalt valikvõistluseks), mille alusel otsustatakse võistkond, kes suvel läheb Rahvusvahelisele Matemaatikavõistlusele (IMC ehk *International Mathematics Competition for University Students*, `www.imc-math.org.uk`).

IMC on võistlus, kus võisteldakse ülikooli põhiõppe taseme matemaatika ülesannete lahendamises. Ülesanded on põhiliselt matemaatilise analüüsi ja algebra valdkonnast, mõnikord ka arvuteooriast ja diskreetsest matemaatikast. Võistluseks on ette nähtud kaks päeva, kummalgi päeval lahendatakse viie tunni jooksul viis ülesannet. Töökeel on inglise keel.

Viimastel aastatel korraldatakse ka ülesannete lahendamise seminare ja väiksemaid valikvõistlusi, mille alusel koostatakse võistkond, kes läheb mõnele väiksemale rahvusvahelisele võistlusele kevadsemestri keskel: oleme kolm korda käinud Peterburis (*North Countries Universities Mathematical Competition* ehk NCUMC, `mathdep.ifmo.ru/ncumc`) ja üks kord Ostravas (*Vojtěch Jarník International Mathematical Competition*, `vjimc.osu.cz`).

Detailsem info ja tulemused on olemas ülikooli matemaatikavõistluste materjalide lehel `math.ut.ee/imc`

Toome välja parimad Tartu Ülikooli olümpiaadil osalejad ja nende parimad saavutused rahvusvahelistel võistlustel aastate kaupa.

2013

Tartu Ülikooli matemaatikaolümpiaadi parimad (kokku oli 11 osalejat):

1. Heiki Niglas (matemaatika, 4. aasta, 90 punkti)

2. Ksenia Rozhinskaya (matemaatika, 3. aasta, 45 punkti)

3.-4. Kaspar Märtens (mat. statistika, 3. aasta, 37 punkti)

3.-4. Rudolf-Harri Oberg (majandusteadus, 4. aasta, 37 punkti)

5. Rihhard Nadel (matemaatika, 2. aasta, 36 punkti)

Kuna Kaspar Märtens loobus IMC-l osalemast, määrati IMC 2013. aasta TÜ võistkonna liikmeteks Heiki Niglas, Ksenia Rozhinskaya, Rudolf-Harri Oberg ja Rihhard Nadel.

Võistlus IMC leidis aset Bulgaarias, Blagoevgradis, 6.–12. augustil. Sel aastal oli olümpiaadil 321 võistlejat kokku rohkem kui seitsmekümnest ülikoolist üle maailma. Meie võistkonna juhendajana oli kaasas diskreetse matemaatika teadur Ago-Erik Riet.

TÜ tudengitest võitis Heiki esimese auhinna ning kuldmedali ja Rudolf-Harri diplomi. Viimati tõi Tartu Ülikoolile IMC esimese auhinna Laur Tooming aastal 2008. Enne teda on samaga hakkama saanud veel Martin Pettai (2004, 2005, 2006), Hendrik Nigul (2005) ja Anton Karputkin (2006). Esimene auhind antakse tavaliselt 15-20 protsendile osalejatest.

Ülikoolide arvestuses saavutas TÜ võistkond 47. koha 72-st.

2014

Muud võistlused

2013. aasta sügissemestril korraldas Heiki Niglas aine "Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest".

2014. aasta aprillis käis võistkond koosseisus Heiki Niglas, Ksenia Rozhinskaya, Rihhard Nadel Peterburis, kus esimest korda organiseeriti võistlus NCUMC. Seal osales ligi 100 üliõpilast kogu Venemaalt. Tartu Ülikooli võistkond tegi võistluse rahvusvaheliseks. Heiki saavutas teise auhinna, Rihhard kolmanda auhinna ning Ksenia diplomi. Juhendajana oli kaasas Aleksei Lissitsin.

TÜMO ja IMC

Tartu Ülikooli matemaatika olümpiaadi parimad (kokku oli 9 osalejat):

1. Heiki Niglas (matemaatika, 5. aasta, 89 punkti)
2. Janno Veeorg (matemaatika, 1. aasta, 52 punkti)
3. Liisi Kerik (Tallinna Ülikool, matemaatika, 3. aasta, 31 punkti)
4. Sven Erik Ojavee (mat. statistika, 2. aasta, 30 punkti)
5. Rihhard Nadel (matemaatika, 3. aasta, 21 punkti)

Kuna Janno Veeorg ja Heiki Niglas loobusid IMC-l osalemast, määrati IMC 2014. aasta TÜ võistkonna liikmeteks Sven Erik Ojavee, Rihhard Nadel, Kristin Jesse ja Andre Ostrak.

IMC leidis aset Bulgaarias, Blagoevgradis, 29. juulist kuni 4. augustini. Sel aastal oli olümpiaadil 324 võistlejat. TÜ tudengid Rihhard Nadel ja Andre Ostrak võitsid diplomi.

2015

Muud võistlused

2015. aasta aprillis korraldati valikvõistlus, mille alusel moodustati võistkond koosseisus Janno Veeorg, Andres Põldaru ja Sven Erik Ojavee, kes käis Peterburis võistlusel NCUMC. Sel korral osales võistlusel ligi 100 üliõpilast kogu Venemaalt, Poolast ja Eestist. Andres saavutas teise auhinna ning Janno ja Sven-Erik kolmanda auhinna. Juhendajana oli kaasas Indrek Zolk.

TÜMO ja IMC

Tartu Ülikooli matemaatika olümpiaadi parimad (kokku oli 6 osalejat):

1. Janno Veeorg (matemaatika, 2. aasta, 70 punkti)
2. Andres Põldaru (füüsika, 1. aasta, 44 punkti)
3. Andre Ostrak (matemaatika, 2. aasta, 37 punkti)
4. Sven Erik Ojavee (mat. statistika, 3. aasta, 25 punkti)
5. Triin Taveter (matemaatika, 1. aasta, 24 punkti)

IMC 2015. aasta TÜ võistkonna liikmeteks määrati Janno Veeorg, Andres Põldaru, Andre Ostrak ja Sven Erik Ojavee.

IMC leidis aset Bulgaarias, Blagoevgradis, 27. juulist kuni 2. augustini. Sel aastal oli olümpiaadil 326 võistlejat. Meie võistkonna juhendajana oli kaasas Aleksei Lissitsin.

TÜ tudengitest võitis Andres teise auhinna ja hõbemedali, Janno kolmanda auhinna ja pronksmedali ning Andre diplomi. Ülikoolide arvestuses saavutas TÜ võistkond 53. koha 74-st.

2016

Muud võistlused

Nii 2015. aasta sügissemestril kui ka 2016. aasta kevadsemestril korraldati "Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest".

Seminari raames toimusid kolm avalikku valikvõistlust, mille alusel moodustati võistkond koosseisus Andres Põldaru, Andre Ostrak ja Triinu Veeorg, kes käis Ostravas võistlusel Vojtěch Jarník International Mathematical Competition. Juhendajana oli kaasas Aleksei Lissitsin

TÜMO ja IMC

Tartu Ülikooli matemaatikaolümpiaadi parimad (kokku oli 19 osalejat):

1. Andres Põldaru (füüsika, 2. aasta, 80 punkti)
2. Janno Veeorg (matemaatika, 3. aasta, 67 punkti)

3. Andre Ostrak (matemaatika, 3. aasta, 36 punkti)

4. Rasmus Erlemann (matemaatika, 3. aasta, 18 punkti)

5. Sven Erik Ojavee (mat. statistika, 4. aasta, 17 punkti)

IMC 2016. aasta TÜ võistkonna liikmeteks määrati Andres Põldaru, Janno Veeorg ja Andre Ostrak.

IMC leidis aset Bulgaarias, Blagoevgradis, 25.–31. juulil. Sel aastal oli olümpiaadil 320 võistlejat. TÜ tudengitest võitsid Andres ja Janno mõlemad kolmanda auhinna ja pronksmedali ning Andre diplomi. Ülikoolide arvestuses saavutas TÜ võistkond 49. koha 72-st.

2017

Muud võistlused

2017. aasta kevadsemestril korraldati 'Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest".

Oktoobris ja veebruaris toimusid valikvõistlused, mille alusel moodustati võistkond koosseisus Andres Põldaru, Janno Veeorg, Oliver Nisumaa ja Triinu Veeorg, kes aprillis käis Peterburis neljandal NCUMC võistlusel. Andres ja Janno saavutasid mõlemad esimese auhinna, Oliver ja Triinu mõlemad teise. Sel korral osales võistlusel 96 inimest Venemaalt, Poolast ja Eestist. Kauglahendamist organiseeriti aga paljudes kohtades üle maailma, sh Hispaanias, Bulgaarias, Poolas, Armeenias, Eestis jt.

TÜMO ja IMC

Tartu Ülikooli matemaatikaolümpiaadi parimad (kokku oli 18 osalejat):

1. Andres Põldaru (füüsika, 3. aasta, 98 punkti)

2. Janno Veeorg (informaatika magistrant, 1. aasta, 88 punkti)

3. Toomas Krips (informaatika, doktoriõpe, 85 punkti)
4. Triinu Veeorg (matemaatika, 2. aasta, 81 punkti)
5. Oliver Nisumaa (matemaatika, 1. aasta, 80 punkti)
6. Andre Ostrak (matemaatika ja statistika magistrant, 1. aasta, 67 punkti)

IMC 2017. aasta TÜ võistkonna liikmeteks määrati Andres Põldaru, Janno Veeorg, Triinu Veeorg ja Oliver Nisumaa. IMC leiab aset Bulgaarias, Blagoevgradis, 31. juulist kuni 6. augustini.

KONVERENTSID JA SEMINARID

27. Rahvusvaheline Matemaatikute Kongress Seoulis, 13.–21. august 2014

MARIA ZELTSER
Tallinna Ülikool

Rahvusvaheline Matemaatikute Kongress (*International Congress of Mathematicians* ehk lühidalt ICM) on suurim matemaatikute konverents. See toimub iga nelja aasta tagant ja korraldajaks on Rahvusvaheline Matemaatika Liit (*International Mathematical Union* ehk lühidalt IMU).

Kongressi avatseremoonial antakse kaalukaid matemaatikute autasusid nagu Fieldsi medal, Nevanlinna auhind, Gaussi medal ja Cherni medal.

Kongressi materjalid publitseeritakse hiljem toimetistes *Proceedings of the International Congress of Mathematicians.* Aastast 2010 kõik toimetised digitaliseeritakse.

Kongress Seoulis oli juba 27. rahvusvaheline matemaatikute kongress ning neljas kongress, mis toimus Aasias – eelmised kolm olid: aastal 1990 ICM Jaapanis, 2010 ICM Indias ja 2002 ICM Hiinas. Esimene rahvusvaheline matemaatikute kongress toimus Zürichis augustis 1897.

Rahvusvahelise kongressi idee sündis aastal 1890 ja kuulub Saksamaa matemaatikutele FELIX KLEINILE ja GEORG CANTORILE.

Et teha kongressi tõeliselt ülemaailmseks pööras orgkomitee erilist tähelepanu matemaatikute meelitamisele arengumaadest. Selleks anti 1000 reisitoetust matemaatikutele arenevatest riikidest.

Viis tuhat matemaatikut 125 riigist tulid Seouli üheksaks päevaks, et kuulata matemaatilisi ettekandeid, kohtuda üksteisega ja töötada koos.

Seoul ICM 2014 teemaks oli "Unistused ja lootused hilistele algajatele".

Korea, vaatamata suhteliselt lühikesele ajaloole kaasaegses matemaatilises teaduses, on teinud märkamisväärse progressi matemaatilistes uuringutes nii kvaliteedilt kui ka kvantiteedilt. Vastavalt SCIE 2008. aasta aruandele oli Korea 11. kohal matemaatiliste artiklite arvu järgi – ehk ta on kahekordistanud tulemust vähem kui 10 aastaga.

SEOUL ICM 2014
INTERNATIONAL
CONGRESS OF
MATHEMATICIANS

Seoul ICM 2014 logo koosneb kahest kuldsest spiraalist, need kasvavad ja laienevad vastavalt kuldlõike seadusele ning sümboliseerivad hiliste algajate unistusi ja lootusi.

S-kujuline logo meenutab S tähte sõnast Seoul ja samuti Tae-Geuk sümbolit Korea lipult.

Tae-Geuk sümboliseerib Yini ja Yangi harmooniat. Punane värv on Yang ehk armastus ja kirg. Sinine värv on Yin ehk unistus ja intellekt.

Selleks et tähistada toimuvat kongressi, kuulutas Lõuna-Korea parlament 2014. aasta matemaatika aastaks.

Korea matemaatika ajalugu

Korea matemaatika ametlik ajalugu algas Kolme Kuningriigi perioodil (57 eKr – 1392 pKr) – Silla, Paekche ja Koguryŏ. Hiina Tangi dünastia eeskujul rajas Silla dünastia aritmeetikahariduse süsteemi, mis kehtis kogu Koguryŏ dünastia valitsemise ajal (918 pKr – 1392 pKr).

Selle süsteemi järgi loodi õppekeskused, mida juhtisid õpetlased ja nende assistendid. Õpilasi vanuses 15-st 30-ni koolitati 9 aasta jooksul olenemata nende staatusest.

Õppekeskuse lõpetanud said riigiameti nimega *Daenama*. Lõpueksam põhines matemaatikaraamatute *Cheolsul*, *Samgae*, *Gujang* ja *Yukjang* teadmistel.

Cheolsul oli Hiinas Tangi dünastia ajal koostatud aritmeetikaraamat. Hiina keeles nimetatakse seda *Zhui Shu* ja tõlgitakse kui "Interpolatsioonimeetodid". Arvatakse, et raamat käsitles lõpmatu rea summasid, nagu arvu π arvutamine kasutades ringjoone sisse ning ringjoone ümber joonestatud hulknurkasid. Ajalooallikad näitavad, et raamat oli nii raske, et väga vähesed tahtsid seda õppida. On muljetavaldav, et seda rasket teemat, millest loobuti Hiinas, uuriti Koreas Koguryŏ dünastia ajal

Gujang (hiina keeles *Jiu Zhang*) tõlgitakse kui "Matemaatika kunsti üheksa peatükki" (*The Nine Chapters on the Mathematical Art*). See oli Ida matemaatika põhiõpik. Raamat sisaldas praktiliste probleemide lahendusi, nagu näiteks ristküliku- ja ringikujuliste maatükkide mõõtmine, heksaeedri ruumala leidmine ja ruutvõrrandite süsteemide lahendamine.

Raamatud *Samgae* ja *Yukjang* pole säilinud meie ajani ja me ei tea nende sisu.

Oktoobris 1946, kui möödus aasta Korea iseseisvumisest Jaapanist, asutati Korea Matemaatika Selts, mis on tuntud kui Chosun Matemaatika ja Füüsika Selts. YOON-SHIK CHOI sai Seltsi presidendiks. Aastal 1948, kui moodustati esimene Korea Vabariigi valitsus, muutsid erinevate kolledžite ja koolide matemaatika õpetajad seltsi nime Korea Matemaatika ja Füüsika Seltsiks. 11. märtsil aastal 1953, kaks aastat pärast Korea sõda, jagati selts kaheks ning tekkis Korea Matemaatika Selts. Veel möödus kolm aastat ja selts hakkas välja andma ajakirja "Matemaatiline haridus" (*Mathematical Education*), aastal 1964 sai ajakirja nimeks "Matemaatika" (*Math*). Aastal 1967 jagati ajakiri "Matemaatika" kaheks: "Korea Matemaatika Seltsi ajakirjaks" ja "Korea Matemaatika Seltsi bülletääniks", mõlemad ilmuvad kaks korda aastas.

Aastal 1981 Korea Matemaatika Selts liitub Rahvusvahelise Matemaatika Liiduga.

Esimene matemaatikaolümpiaad toimus Lõuna-Koreas novembris aastal 1987. Aastal 1988 võtsid Korea matemaatikud esmakordselt osa IMO-st (*International Mathematical Olympiad*) Austraalias ja said 22. koha 60 riigi hulgas. Alates 1990. aastate lõpust lõpetavad Lõuna-Korea esindajad IMO 10 parima hulgas, 5. koht aastal 2005 ja 4. koht 2001. aastal.

Konverentsi korraldusest

Rahvusvaheline Matemaatikute Kongress, mida mõnikord nimetatakse Matemaatika Olümpiamängudeks, avati 13. augustil Seoulis ja samal päeval kuulutati välja kaheksa auhinnasaajat. Viis tuhat inimest tulid hommikul messikeskusse, et vaadata, kuidas Lõuna-Korea president Park Geun-hye avab kongressi. "Usun, et inimkonna areng tulevikus on tihedalt seotud matemaatikaga," ütles ta. "Matemaatika võimaldab meil lahendada probleeme uute meetodite ja printsiipide abil ning annab väärtusliku panuse selliste valdkondade ühendamiseks nagu teadus ja tehnoloogia, tööstus, kultuur ja kunst."

Autasude saajad olid hommikupoolse osa peamised kangelased. ICM annab neid iga nelja aasta tagant. Esimene autasu oli Fieldsi medal – see anti neljale alla 40 aasta vanusele matemaatikule väljapaistvate avastuste eest matemaatikas.

Rolf Nevalinna auhind antakse samast vanusekategooriast matemaatikutele silmapaistva matemaatilise panuse eest arvutiteaduses. Gaussi medaliga märgitakse ära matemaatiku mõju matemaatikaga mitte seonduvates töödes ja Cherni medal antakse elutöö eest.

Tseremoonia algas ilusate Lõuna-Korea tantsijate etendusega ja seejärel kuulutas IMU president Ingrid Daubechies välja auhindade võitjad. Fieldsi medalid said Stanfordi Ülikooli professor Maryam Mirzakhani (matemaatiliste pindadega seotud töö), Prantsuse Riikliku Teaduskeskuse matemaatik Artur Avila (dünaamilised süsteemid), Princetoni Ülikooli professor Manjul

BHARGAVA (arvuteooria) ja MARTIN HAIRER (diferentsiaalvõrrandid). See ICM oli eriline, kuna esimest korda sai Fieldsi medali naissoost matemaatik – iraanlane Maryam Mirzakhani. Kahjuks jäi tema ettekanne haiguse tõttu ära. Oli tore näha tseremoonia ajal laval kolme naist – medali omanik, IMU president ja riigipea.

Nevanlinna auhinna sai New Yorgi ülikooli professor SUBHASH KHOT. Tema töö on seotud keeruliste algoritmide mõistmisega ja meetodite leidmisega, et neid tõhustada.

Cherni medali sai endine Princetoni Perspektiivsete Uuringute Instituudi direktor PHILLIP GRIFFITH oma tööga algebralises geomeetrias, diferentsiaalgeomeetria ja diferentsiaalvõrrandite valdkonnas. Gaussi medaliga autasustati California Ülikooli professorit STANLEY OSHERI tema tööde eest arvuti pilditöötluses ja arvuti "nägemises".

Igal hommikul kuulati kolme plenaarettekannet (kokku 20 – Maryam Mirzakhani plenaarettekanne jäi tema haiguse tõttu ära, neist 9 USA, 2 Suurbritannia, 3 Prantsusmaa ning 1 Korea, Kanada, Šveitsi, Itaalia, Jaapani ja Brasiilia matemaatikutelt).

Pärast lõunat kuulati üheksateistkümnes sektsioonis nii tellitud ettekandeid (179, a 45 minutit), lühiettekandeid (707, a 20 minutit) kui ka posterettekandeid (476).

Samuti toimus kahel õhtul 2 spetsiaalset loengut: JOHN MILNORI Abeli loeng "Topoloogia läbi nelja sajandi" ning ICM Emmy Noetheri loeng, mille pidas GEORGIA BENKART. ICM Emmy Noetheri loeng austab naisi, kes on andnud suure ja pideva panuse matemaatikateadusse.

Eestit esindas kongressil MARIA ZELTSER posterettekandega "*Applications of weak monotonicity in number series and Hardy inequalities*".

Kultuurprogrammi raames korraldati matemaatika populariseerimise programmi "Imaginary" näitus Korea näituste- ja konverentside keskuses. Selle programmiga alustati Saksamaal aastal 2008. Gwacheoni linna Riiklikus Teadusmuuseumis viidi läbi loengusarjad: "Matemaatika ja arhitektuur" ning "Matemaatika ja kunst". 19. augustil näidati prantsuse filmi provokatiivse pealkirjaga “Kuidas ma hakkasin matemaatikat vihkama” (pr. *Comment j'ai détesté les maths*, ing. *How I Came to Hate Math*). 2010. aasta Fieldsi medali laureaat Cedric Villani on selle filmi ekspert. Film proovib vaidlustada väidet, et (nagu mõnikord arvatakse) matemaatika ja matemaatikud on nii igavad ja kasutud.

Kongressi lõputseremoonial sai Buenos Airese Ülikooli professor Adrián Paenza Leelavati auhinna matemaatika populariseerimise eest ning Seouli orgkomitee saatis õnnitlussõnumi Brasiiliasse, riiki, kus toimub järgmine Rahvusvaheline Matemaatikute Kongress. Lõputseremooniale eelnenud päeval pidas Adrián Paenza avaliku loengu pealkirjaga “Vale uks” (*The wrong door*). Ta konstateeris, et inimestel on eelarvamus matemaatikast kui raskest teadusest, ning see tuleb sellest, et nemad astuvad sisse “valest uksest”. Ta rõhutas, et tegelikult matemaatika on sõbralik ja rõõmus teadus ning kutsus matemaatikuid hoiatama inimesi “vale ukse” eest ja jagama oma teadmisi nendega.

Kangro-100. Methods of Analysis and Algebra

KRISTEL MIKKOR
Tartu Ülikool

Rahvusvaheline konverents *Kangro-100. Methods of Analysis and Algebra. International conference dedicated to the centennial of professor Gunnar Kangro* toimus Tartus 1.–6. septembril 2013. aastal (`kangro100.ut.ee`). Järgnev on peamiselt lugu sellest, kuidas me seda GUNNAR KANGRO auks pühendatud konverentsi korraldasime.

Algas see 2012. aasta kevadel mitmel Tartu Ülikooli matemaatika instituudi professoril olnud mõttest, et varasemalt iga viie aasta tagant toimunud Eesti siseste Gunnar Kangro auks korraldatud konverentside sari võiks tema 100-ndal sünniaastapäeval toimuda palju suurejoonelisemana ja rahvusvahelisena. Sama aasta juulis avati kolmas Ettevõtluse Arendamise Sihtasutuse (EAS) taotlusvoor, kus oli võimalik esitada taotlus konverentsi korraldamise toetuse saamiseks. Sellega tekkis ka võimalus üritada saada konverentsi korraldamiseks väga hea rahastamine, kuigi lootus selles Euroopa Liidu struktuurivahendite taotlusvoorus ühe matemaatikakonverentsiga edukas olla oli väga väike.

Lühike toetuse tutvustus tundus esialgu paljulubav. Toetuse eesmärgiks oli väliskülastajate ööbimiste arvu suurendamine ja turismi hooajalisuse vähendamine, mis omakorda tähendas, et kõige olulisem oli vähemalt 300 välisriikide kodaniku ööbimist Eestis ja ürituse toimumine väljaspool turismihooaega ehk perioodi juuni–august ning seejuures ei olnud piiravaks kriteeriumiks ürituse sisu. Seega nädalase rahvusvahelise matemaatikakonverentsi jaoks, mis toimuks novembris, tundus igati hea variant. Taotlusvooru eelarve oli 1 000 000 eurot, millega toetati rahvusvaheliste konverentside ja kultuuriürituste kavandamist ja läbiviimist ning turundustegevust välisriikides, mis tundus jällegi igati soodne variant. Kuid siiski olid eelistatud seisundis kõik rahvusvahelist meediakajastust saavad kultuurisündmused ja konverentsid, milleks eelkõige on kõik Eestis toimuvad suured spordisündmused, ja see omakorda tekitas küll tõsise kahtluse, kas tõesti on võimalik, et üks matemaatikakonverents selles võiduajamises üldse silma paistab.

Taotluste esitamise tähtajaks oli seatud 24. september ja taotluse koostamine algas kuu aega enne tähtaega. Kõigepealt said selgeks kõik nõuded, mida selle meetme taotlusvoorus konverentsile esitati ja mis esimese hooga paneb lihtsalt ohkama, sest kui vähemalt üks neist jääb täitmata, jääb ka raha saamata. Täpsemalt olid nõueteks: täidab meetme eesmärki; aitab kaasa Eesti kui reisisihi tuntuse suurenemisele; konverents korraldatakse Eestis (senine ja edaspidine võimalik samalaadse konverentsi korraldus andis kuni 20% koguhinnangust); konverentsi delegaadid ööbivad majutusettevõttes, kusjuures minimaalne väliskülastajate ööbimiste koguarv on väljaspool Harjumaad 300 (andis koguhinnangust kuni 20%); kestab vähemalt kolm järjestikust päeva; konverentsi põhiprogrammile lisaks korraldatakse Eestit kui turismi sihtkohta tutvustav ekskursioon; toimumise aeg ei ole varasem kui 6 kuud pärast taotlusvooru avamist; turundusmaterjalid lähtuvad "Tutvusta Eestit" turunduskontseptsioonist; toetuse saaja korraldab konverentsi ajal konverentsi turunduskanalites teavituse veebilehest `visitestonia.com` (turundus ja Eesti tutvustamine andis koguhinnangust kuni 20%).

Edasi selgus tõsiasi, et taotluse esitamine eeldab lisaks ürituse üldinfole ka väga detailset informatsiooni korralduskomitee, programmi, plenaar- ja teiste esinejate, toimumiskoha ja -aja, majutuse ja transpordi, kodulehe ja konverentsimaterjalide, ava- ja lõpuürituse, ekskursioonide ja Eestit tutvustavate programmide ning turunduse ja konverentsi kajastamise, tegevuskava ja eelarve kohta. Ettevalmistus andis koguhinnangust kuni 20%, lisaks ainus, mis Tartu Ülikooli puhul kindlustas maksimumhinnangu ehk 10% koguhinnangust, oli korraldaja finantsvõimekus. Kuna kõik see eeldas lisaks taotlusvormis antavatele lühikirjeldustele ka üksasjaliku lähteülesande kirjutamist, mis läks hiljem erinevate kriteeriumitena hindamisele, siis reaalsuses tähendas see kuu aega taotluse kirjutamist ning kogu konverentsi korraldamise ja läbiviimise paika panemist peaaegu viimse detailini.

Samas oli väga ahvatlevaks osaks kõik see, milleks toetust sai kasutada ehk projektide maailmas tuntud võlusõna "abikõlblikkus". Abikõlblikud olid eriti välisriikidest saabuvate esinejate transpordi- ja majutuskulud; reklaammaterjalide tootmise ja levitamise kulud; konverentsi läbiviimiseks vajaliku tehnika ja ruumide kulud; Eestit kui turismi sihtkohta tutvustava ekskursiooni korraldamise kulud; ava- ja lõpuürituse korraldamisega seotud kulud, sealhulgas toitlustuskulu, esinejate tasud, ruumide rent. See oli just see koht, kus ma tundsin, et kõik need teadmised ja oskused, mida ma olin varem Tartu Ülikooli teadus- ja arendusosakonnas projektide koordineerimisel ning Eestis atesteeritud giidina tegutsemisel omandanud, sai selle konverentsi heaks tööle panna. Lisaks ka mitmeid häid näiteid teistelt konverentsidelt, kus varasemalt osaletud ja eriti just enne taotluse kirjutamist toimunud ENO TÕNISSONI poolt korraldatud konverentsi TIME-2012 (`www.time2012.ut.ee`) korraldamisele kaasa aitamine.

Kangro-100 avaüritus TÜ Ajaloomuuseumis. Foto: MAREK KOLK.

Esmalt oli vaja moodustada korralduskomitee (*scientific and organizing committee*) ja hindamisel andis meeskonna koosseis kuni 10% koguhinnangust. On ilmne, et selle juht peab olema silmapaitev matemaatik, aga samas ka inimene, kes reaalselt võtab vastutuse ja veab kogu protsessi võiduka lõpuni, ning parim korralduskomitee esimees sai olla vaid EVE OJA. Tema vastutada oli nii kogu konverentsi kui ka analüüsi sisulise osa korraldamine. Algebra osa sisulise korraldamise eest vastutas kaasesimehena KALLE KAARLI ning kogu konverentsi tehnilise korraldamise eest vastutasin kaasesimehena mina. Korralduskomiteesse kuulusid Tartu Ülikoolist veel RAINIS HALLER, VALDIS LAAN, ALEKSEI LISSITSIN, MÄRT PÕLDVERE, INDREK ZOLK ja sekretärina SVETLANA SAPRÕKOVA, Tallinna Ülikoolist ANDI KIVINUKK ja ANNE TALI ning väliskolleegidest RICHARD M. ARON (Kenti Ülikool), JĀNIS CĪRULIS (Läti Ülikool), ULRICH KNAUER (Carl von Ossietzky nim. Ülikool), OLAV NYGAARD (Agderi Ülikool), HANS-OLAV TYLLI (Helsingi Ülikool), DIRK WERNER (Berliini Vaba Ülikool).

Järgmine oluline küsimus oli konverentsi toimumisaeg (andis koguhinnangust kuni 10%). Kaalumisel olid nii G. Kangro sünnikuupäeva ehk 21. novembri eelne ja järgne aeg kui ka suvine periood, mis on kõige populaarsem konverentside toimumise aeg Eestis. Korralduskomitee esimehe Eve Oja väga hea ettepanekuna jäi lõpuks valikuks 1.–6. september ehk aeg, mil Eestis on veel soe ja ilus ning samas ei oleks taotluse mõttes enam tegemist turismi kõrghooajaga.

Koheselt oli vaja paika panna ka plenaaresinejate nimekiri. Sellega seoses meenub üks lõunatund Liivi tn õppehoone 6. korruse puhkeruumis, kus andsin Kalle Kaarlile ja Valdis Laanele ülesande panna kirja viis väga tuntud ja teadustöö osas tunnustatud algebraisti, keda me võiksime konverentsile kutsuda. Kirja said sellised maailmanimed nagu GEORGE JANELIDZE, KEITH KEARNES, RALPH MCKENZIE, AGNES SZENDREI ja MIHHAIL VOLKOV. Seejuures on mul hästi meeles meie mõlema algebraisti kahtlus "need on parimad parimatest, aga isegi, kui me raha saame, siis vaevalt, et nad meie konverentsile tulevad". Analüüsi poolelt oli see samuti väga hea võimalus kutsuda siia maailma absoluutne tipp nagu RICHARD M. ARON, JOHANN BOOS, BERNARDO CASCALES, HAROLD GARTH DALES, JOE DIESTEL, GILLES GODEFROY, WILLIAM B. JOHNSON ja ALBRECHT PIETSCH.

László Márki, Ralph McKenzie ja Peeter Puusemp juunior avaüritusel. Foto: MAREK KOLK.

Taotluse koostamise protsessi kõige eredama hetkena on meeles see, mis andis minu jaoks kogu sellele konverentsile tähtsuse ja väga selge sihi, miks seda teha ning miks see on Eesti matemaatika ajaloo väga oluline osa. Nimelt oli taotluses vaja anda ürituse üldine kirjeldus, mille G. Kangro tähtsust rõhutava osa jaoks kirjutas teksti TOIVO LEIGER. Selle põhjal sai kirja kogu taotluse kõige olulisem osa ja see kõlas nii: "2013. a. septembris korraldab Tartu Ülikooli matemaatika-informaatikateaduskond Tartus rahvusvahelise konverentsi, tähistamaks väärikalt läbi ajaloo kõige olulisema matemaatiku Gunnar Kangro 100. sünniaastapäeva. Gunnar Kangrot peetakse kõige olulisemaks matemaatikuks, kuna just tema suunas matemaatika-alase uurimis- ja õppetöö sõjajärgses Tartu Riiklikus Ülikoolis uutele kaasaegsetele rööbastele. Tema loetud algebra ja matemaatilise analüüsi kursustes leidsid kajastamist muutused, mis neis valdkondades olid toimunud 20. sajandi esimesel poolel. Väga oluline oli ka tema poolt uue moodsa aine – funktsionaalanalüüsi

– loengukursuse loomine, muuhulgas sai see lähtekohaks arvutusmeetodite teooria uue uurimissuuna loomisele ja edasisele arengule. Kangro oli oma aja kuulsaim Eesti matemaatik ja maailmas kõrgelt hinnatud spetsialist oma põhilises uurimisvaldkonnas – summeeruvusteoorias. Tema sellealaseid töid iseloomustab moodsate meetodite rakendamine, mida teised matemaatikud veel ei kasutanud. Eesti teadusloos on Kangro hindamatuks teeneks terve põlvkonna uute matemaatikute kasvatamine, tema juhendamisel kaitsesid kandidaadiväitekirja 23 matemaatikut. Suures osas kujunes neist ja nende õpilastest välja see õppejõudude ja teadurite kaader, kes Eesti kõrgkoolides matemaatikat on õpetanud ja arendanud. Lisaks matemaatilisele analüüsile on ta suunanud algebra, arvutusmeetodite ja geomeetria arengut. Märkimist väärib Kangro initsiatiiv 1960-ndatel aastatel Tartu Ülikoolis matemaatika-alase kõrghariduse ümberkorraldamisel seoses kasvava vajadusega arvutispetsialistide järele. Gunnar Kangrota ei oleks tänapäeval Eesti matemaatika-alane õppe- ja teadustöö nii kõrgel ja maailmas tunnustatud tasemel, kui ta seda hetkel on, ning paljud valdkonnad, alates analüüsist ja lõpetades arvutiteadusega, nii kaasaegsel ja arenenud tasemel. See on põhjuseks, miks 2013. aastal esmakordselt korraldatakse Eestis nii kõrge teadusliku tasemega ja suure (eelkõige välisriikidest saabuvate) osalejate arvuga matemaatika-alane konverents, mis eeldatavalt saab olema Eesti matemaatika ajaloo sajandisündmus."

Selliste mõtetega ja 22 305 eurose toetussooviga, aga üsna vähese edukuse lootusega, läks meie taotlus Tartu Ülikooli poolt 24. septembril EAS-i teele. Üsna ootamatu oli seejuures vaevalt kolm nädalat hiljem saada EAS-i tootearenduse koordinaatorilt Marge Sargmalt kutse tulla vestlema, et taotlust täpsustada. Olime 19. oktoobril Evega kohtumisel, mis osutus väga põhjalikuks küsimustevooruks ning oli justkui tõsine ülikooli eksam. Veelgi suurem oli aga meie üllatus, kui saime 14. detsembril Marge kirja, mis edastas meile hea uudise meie taotluse rahuldamise kohta soovitud rahalises mahus. Sellest päevast edasi algas tõsine konverentsi korraldamise töö, mida sai tehtud iga päev kogu järgneva kümne kuu vältel.

Rahastamisotsuse saanud taotlus andis ühelt poolt ette väga konkreetse tegevuskava, mida, millal ja kuidas teha, aga samas eelarve poolelt ka üsna suured kitsendused saada hakkama just nende summadega kulude lõikes, mis kirja said. Rahastaja ja Euroopa Liidu struktuurivahendite reeglite järgimine projekti elluviimisel oligi kõige keerulisem osa kogu korraldustööst, mis omakorda tähendas tohutul hulgal hinnapakkumistega ja aruannetega tegelemist. Seejuures tuli konverentsi osavõtumaks määrata üsna madalaks, sest vastasel juhul oleks kogu saadav tulu kahandanud saadava toetuse hulka liiga palju. Lisaks oli vaja leida ka lisarahastust, kuna konverentsi tavapärased komponendid nagu konverentsikogumik, kohvipausid ja lõunasöök, ei olnud EAS-i toetusena abikõlblikud. Täiendav rahastus tuli Tartu Linnavalitsuselt, Hasartmängumaksu Nõukogult, Tartu Ülikooli rektorilt ning matemaatika instituudilt, sh projektist "Eesti matemaatika ja statistika doktorikool".

Richard M. Aron, Harold Garth Dales ja Indrek Zolk lõpuüritusel. Foto: MAREK KOLK.

Üks esimesi rõõmustavamaid hetki oli plenaaresinejate kinnitused, et nad kõik saavad ja soovivad tulla konverentsile. Kuigi lennupiletite ostmine välismaalastele läbi Eesti reisibüroode kolme pakkumise võrdlemisel, kasutades selleks veel kohalikku vahendajat, ja hilisem pardakaartide postiga edastamine on üsna absurdne ning, et kohati oli ka õhus “oht” kulude riigihanke piiri ehk 10 000 euro ületamise osas, siis lõpuks läks nii piletite soetamine kui ka esinejate reisimine sujuvalt.

Järgmine hea leid oli konverentsi toimumiskoht. Esialgu sai kaalutud Dorpati konverentsikeskuse ruume, mis on igati elegantsed ja moodsad, aga AHHAA keskus võlus meid palju rohkem oma lihtsuses, kuid samas andes selle nö akadeemilise tunde. Korraldusliku poole pealt oli meil AHHAA-s tegutsemiseks palju vabadust korraldada konverentsi just oma äranägemise järgi, abiks sõbralikud ja koostöövalmid kohalikud töötajad. Ning koos keskuses toimunud lõpuüritusega, mille hästi meeldejäävaks osaks olid Svjata Vatra ja kandlemees Sanderi etteasted, oli see väga huvitav koht meie väärika ürituse korraldamiseks.

Kangro-100 lõpuüritus AHHAA keskuses. Foto: Marek Kolk.

Väga huvitavaks väljakutseks oli konverentsi turundamise ja Eesti tutvustamise tegevus. Lisaks tavapärastele plakatitele, flaieritele, kutsetele ja e-teadetele, sai uudse lahendusena proovitud lühivideote loomist (vt `www.youtube.com` märksõna Kangro-100) ja nende edastamiseks infokirju. Eesmärgiks oli anda kuue klipiga ülevaade, kui tore ja huvitav paik on Eesti, kui oluline matemaatik on meie jaoks Gunnar Kangro ning tekitada huvi konverentsil osaleda. Kandvaks ideeks oli kasutada klippides professionaalsete näitlejate asemel meie oma teaduskonna inimesi. Idee teostus osutus üle ootuste lihtsaks – polnud mitte mingit probleemi isegi kasvõi kohe hoo pealt küsides inimesi Tähtvere parki suusatama, Toome väljakutele tennist mängima, maalima, tantsima, intervjuud andma, tekstilõike kaamera ees ja taga lugema saada. Seda projektiosa võib kindlasti lugeda kordaläinuks ning seda kirjeldab kõige paremini ühe plenaaresineja kommentaar: "On tore näha eelnevalt videotes nähtud inimesi päriselt konverentsil osalemas".

Kangro-100 korralduskomitee esimees Eve Oja osalejatega lõpuüritusel. Foto: MAREK KOLK.

Kõige olulisem kogu konverentsi korraldamise juures oli meeskond. On väga hea teha midagi suurt, kui leidub palju asjalikke ja abivalmeid inimesi ja Tartu Ülikooli matemaatikute seas oli neid sellel 2013. aastal suur hulk. See muidugi ei tähendanud, et me kohalike korralduskomitee liikmetega kõik olime alati kõiges sama meelt. Aeg-ajalt tuli ikka ette vaidlusi, kus vahetati lugematuid e-maile ka kõige pisemate detailide üle nagu esinemisjärjekord, kodulehe või konverentsikogumiku kujundus, sai vihastatud ja ka alla antud, aga nagu ütleb rahvatarkus: "Vaidlustes sünnib tõde", nii võib ka meie vaidlused kokku võtta, et tulemus oli lõpuks parim. Väga hea tulemuse tagas ka omavaheline hea tööjaotus – igaühel oli täita oma töölõik ja seda tehti siis kui vaja ja nii, kuidas vaja ning igaüks sai ennast rakendada just selles, milleks tal on kõige paremad oskused ja teadmised.

Konverentsi sisulisest poolest ei ole juttu olnud, aga seda kõike on parem ise vaadata ja lugeda konverentsi kodulehelt `kangro100.ut.ee`. Sealt on leitavad nii plenaaresinejate ettekannete videod, konverentsikogumik ettekannete teesidega kui ka kogu muu info konverentsi kohta. Lisaks on konverentsil osalejate artiklid avaldatud ajakirja *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* numbris 18-1. Konverentsi matemaatilise osa kohta meenutan ühe plenaaresineja antud kommentaari: "Esialgu oli üllatav, et ühele konverentsile on kokku pandud algebra ja analüüs, mida enamasti ei kohta. Aga osutub, et selline eri valdkondi esindavate matemaatikute kokkusaamine on väga huvitav ja motiveeriv".

Kangro-100 konverentsikogumiku G. Kangro elust ja tööst rääkinud ettekande teeside lõpus on öeldud: "Professor G. Kangro oli suurepärane isiksus. Juhendades üliõpilaste lõputöid, kujundas ta ka nende tõekspidamisi ja arusaama elust. Gunnar Kangro õpilased peavad teda meeles armastuse ja suurima lugupidamisega, kandes edasi tema matemaatilist ja inimlikku pärandit." Mul on väga hea meel, et sain anda oma panuse G. Kangro kui suurepärase inimese ja matemaatiku elu ja tööd tähistava konverentsi korraldamisse ja kõikide Eesti matemaatikute poolt võime olla tulemusega igati rahul – me suudame seda teha maailmatasemel.

Lõpetuseks tagasiside plenaaresineja Joe Diesteli kirjast: "*First, let me emphasize how smoothly the conference went. I know from personal experience how complicated an affair like this can be; I didn't sense any problems for the participants so that indicates careful planning and outstanding execution. You and all the organizers are to be congratulated for this. I quite frankly do not remember any of the many meetings and conferences that I've attended that ran* *so smoothly. Next, I enjoyed the talks, even (most of) those in algebra! They were informative and (often) inspiring.*

Again, my enjoyment was enhanced by the gracious manner in which Eve and you treated me; I know several others that I spent quite a bit of time with outside the meeting times (in particular Aron, Boos, Cascales, Godefroy, Johnson and Pietsch) felt the same."

Rahvusvahelised arvutusmatemaatika konverentsid MMA-AMOE2013 ja MMA2016

UNO HÄMARIK
Tartu Ülikool

Baltimaade rahvusvaheline konverentsisari *"Mathematical modelling and analysis"* on külakorda Leedus, Lätis või Eestis toimunud igal aastal alates aastast 1996. Eesti on võõrustajaks olnud aastail 2002, 2008, 2012, 2013, 2016. Käesolevas EMS-i 2013–2016 aastaraamatus on põhjust kirjutada neist 2 viimasest, järjekorranumbreid 18 ja 21 kandvatest konverentsidest täpsemate toimumisaegadega 27.05–30.05.2013, 1.–6.06.2016 ja vastavate veebilehtedega
`http://www.ut.ee/mma-amoe2013/` ning
`http://www.ut.ee/mma2016/`.
2013. a. toimunud kaksikkonverentsi nimetuse teise poole AMOE tähendus on *"Approximation methods and orthogonal expansions"*. Selle sarja konverentsid on operaatorvõrrandite lahendamise kesksed ja toimunud aastatel 1998, 2003, 2008, 2013 pühendatutena akadeemik GENNADI VAINIKKO vastavatele juubelitele 60, 65, 70, 75. Konverentsid aastatel 1998, 2003, 2008 toimusid Käärikul, 2013 ja 2016 omad aga Tartus, Dorpati konverentsikeskuses. Professor Vainikko suur autoriteet rahvusvahelises seltskonnas tõi tema juubelikonventsidele arvukalt prominentseid külalisi, 2016. a. konverentsil oli osavõtjaid vähem (aga plenaaresinejate enamiku tase ei jäänud kummalgi aastal Vainikkole alla). Osavõtjaid oli 2013. aastal 135 ja 2016. aastal 76, toome vastavad arvud ka riikide kaupa: Läti 37, 11; Eesti 27, 20; Leedu 24, 16; Saksamaa 6, 2; Venemaa 4, 7; Itaalia 4, 3; Austria 4, 0; Valgevene 4, 0; Poola 3, 5; Türgi 3, 1; Soome 3, 0; Ukraina 2, 1; Portugal 2, 2; India 2, 0; USA 2, 0; Austraalia 1, 1; Hispaania 1, 1; Taivan 1, 1; Prantsusmaa 1, 0; Gruusia 1, 0; Jaapan 1, 0; Hiina 1, 0; Slovakkia 0, 1; Malaisia 0, 1.

Akadeemik Gennadi Vainikko esinemas konverentsil MMA2013.
Foto: MAREK KOLK.

Plenaarettekandega esinesid nii 2013 kui 2016 IAN H. SLOAN Austraaliast (teemaks numbriline integreerimine suurtes dimensioonides), HELMUT NEUNZERT Saksamaalt (tööstusmatemaatika) ja RAIMONDAS CIEGIS Leedust (diferentsiaalvõrrandite lahendamine). Teiste plenaarettekannete teemad olid 2013. a. Volterra integraalvõrrandid (HERMANN BRUNNER, Hiina; G. Vainikko), diferentsiaalvõrrandite lahendamine (GRIGORY I. SHISHKIN, Venemaa; ZDZISLAW JACKIEWICZ, USA), mittekorrektsed ülesanded (BARBARA KALTENBACHER, Austria; SERGEI PEREVERZYEV, Austria; RAINER KRESS, Saksamaa) ja 2016. a. integraalvõrrandid (G. Vainikko, TERESA DIOGO, Portugal), mittekorrektsed ülesanded (MARTIN HANKE, Saksamaa; ANATOLY YAGOLA, Venemaa), diferentsiaalvõrrandid (ANDREJS REINFELDS, Läti), murrulised tuletised (IGOR PODLUBNY, Slovakkia), kliimast ja veetaseme ekstreemsusest (TARMO SOOMERE, Eesti). Paralleelselt töötasid 4 sektsiooni, kus nii 2013 kui 2016 toimusid minisümpoosiumid "Mittelokaalsete rajatingimustega ülesanded" (juhataja A. ŠTIKONAS, Leedu), minisümpoosium "Tõenäosuslike mudelite rakendamine analüütiliste funktsioonide lähendamisel" (A. LAURINCIKAS, Leedu), muudes sessioonides olid lisaks plenaarettekannete temaatikale vaatluse all modelleerimine, numbrilised meetodid, analüüs, splainid.

Konverentside korraldajateks olid Tartu Ülikooli matemaatika instituut (2016 TÜ matemaatika ja statistika instituut), Euroopa Tööstusmatemaatika Konsortsium, Vilniuse Gediminase Tehnikaülikool, Eesti Matemaatika Selts. Organiseerimiskomitees osalesid A. PEDAS (esimees), R. CIEGIS (aseesimees), U. HÄMARIK (aseesimees), E. IDEON, U. KANGRO, E. KIRSIAED, M. KOLK, K. LÄTT, P. MIIDLA, P. OJA, K. ORAV-PUURAND, T. RAUS, M. VIKERPUUR. Konverentside ettekannete põhjal valminud artiklitest on ilmunud erinumbrid eelretsenseerimisega ajakirjas *Mathematical Modelling and Analysis*.

Viimane MMA sarja konverents toimus 30.05–2.06.2017 Leedus Druskininkais (vt. veebilehte `http://inga.vgtu.lt/~art/konf/`).

Cliffordi algebrate konverents ICCA10 Tartus

Viktor Abramov
Tartu Ülikool

Cliffordi algebratele ja nende rakendustele kaasaegse matemaatika, teoreetilise füüsika ja inseneriteaduse erinevates valdkondades pühendatud rahvusvaheliste konverentside sari *International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics* sai alguse 1985. aastal Inglismaal, kus Kenti Ülikooli juures toimus selle sarja esimene konverents. Selle sarja järgmiste konverentside toimumiskohad on Montpellier (Prantsusmaa, 1989), Ghent (Belgia, 1993), Aachen (Saksamaa, 1996), Ixtapa (Mehhiko, 1999), Cookevill (Ühendriigid, 2002), Toulouse (Prantsusmaa, 2005), Campinas (Brasiilia, 2008), Weimar (Saksamaa, 2011).

Ülalpool mainitud rahvusvaheliste konverentside sarja kümnes konverents (lühinimega ICCA10) toimus Tartus, 4.–9. augustil 2014. Konverentsi tööst võttis osa 97 osavõtjat. Tartus toimunud konverentsi üheks eesmärgiks oli näidata, millised teadussuunad Cliffordi algebrate ja Cliffordi analüüsi valdkonnas on eriti tähtsad seoses nende rakendustega kaasaegses geomeetrias, arvutusmatemaatikas, teoreetilises füüsikas ja inseneriteaduses. Selleks olid konverentsi raames korraldatud *workshop*'id järgmistel teemadel:

- diskreetne ja pidev Cliffordi ning kvaternioonmuutuja funktsioonide analüüs;
- konformsed struktuurid ja konformsed spinn-struktuurid;
- signaalidest teadvusse kasutades Cliffordi ja geomeetrilisi algebraid;
- geomeetriline algebra elementaarosakeste füüsika standardmudelis;
- geomeetriline algebra ülikoolis;

- kvaternioonide ja Clifford–Fourier teisendused ning lainekesed.

David Eelbode (Antwerpeni Ülikool, Belgia) pälvis silmapaistva uurimistöö (harmooniline analüüs ja selle rakendused kvantväljateoorias) eest Cliffordi nimelise preemia ja konverentsi ajal toimus selle preemia pidulik kätteandmine. Konverentsis osalevate doktorantide ja järeldoktorite seas oli korraldatud parima ettekande konkurss. Doktorantide konkursi võitis Cohl Furey (Perimeter Teoreetilise Füüsika Instituut, Kanada) ettekandega teemal "Laengu kvantiseerimine arvuoperaatori abil". Järeldoktorite konkursi võitis Hilde de Ridder (Ghenti Ülikool, Belgia) ettekandega teemal "Fueteri teoreem diskreetses Cliffordi analüüsis".

Pildil vasakult: Hilde de Ridder (Ghenti Ülikool, Belgia), Olga Liivapuu (Eesti Maaülikool), Eckhard Hitzer (Cliffordi Seltsi president, Rahvusvaheline Kristlik Ülikool Tokios, Jaapan) ja Viktor Abramov (Tartu Ülikool).

Konverentsi korralduskomitee liikmed dotsent Olga Liivapuu (Eesti Maaülikool), TÜ Matemaatika instituudi doktorandid Priit Lätt, Md. Raknuzzaman, Jaan Vajakas tegid tubli tööd konverentsi ettevalmistusel ja hiljem konverentsi läbiviimise ajal ning konverentsi lõpetamisel oli see mainitud Eckhard Hitzeri (Cliffordi Seltsi president) kõnes. 2017. aastal ilmus rahvusvahelise ajakirja "*Advances in Applied Clifford Algebras*" (Springer International Publishing) erinumbris konverentsi tööde kogumik, mille toimetajad korralduskomitee liikmed Olga Liivapuu ja Priit Lätt tegid palju tehnilist tööd artiklite retsenseerimisel ja vormistamisel.

Konverentside sarja järgmine konverents toimub 2017. aasta augustis Ghentis (Belgia).

10. Tartu rahvusvaheline mitmemõõtmelise statistika konverents

Kalev Pärna
Tartu Ülikool

Tartu mitmemõõtmelise statistika konverentside traditsioon sai alguse juba aastal 1977, kui Tartu Ülikooli Kääriku spordibaasis toimus esimene üleliiduline teaduslik-tehniline konverents "Mitmemõõtmelise statistika rakendamine majanduses ja kvaliteedi kontrollis" (Kääriku, 28.–30. sept. 1977). Tookordne konverents oli tunnustuseks Tartus tehtavale tööle rakendusstatistika vallas. Seejärel on konverents toimunud enamasti iga 4 aasta tagant, muutudes alates 1994. aastast ingliskeelseks ning meelitades tavaliselt kohale ligi sada osavõtjat paarikümnest riigist. Meie konverentsidest on osa võtnud statistikamaailma suurkujud C.R. Rao, T.W. Anderson, T. Durbin, I. Olkin jpt.

Seekordne, 10. Tartu rahvusvaheline mitmemõõtmelise statistika konverents toimus 28. juunist kuni 1. juulini 2016 TÜ Matemaatika ja statistika instituudi ja Eesti Statistikaseltsi korraldusel. Üritusest osavõtjate arvuks kujunes seekord 83. Konverentsi istungid toimusid instituudi õppehoones J. Liivi tn. 2.

Avavastuvõtul TÜ Ajaloomuuseumi Valges saalis Toomel.
Foto: Märt Möls.

Konverentsi avasõnad ütles programmikomitee esimees DIETRICH VON ROSEN (Rootsi). Seejärel sai sõna konverentside seeria algataja ENE-MARGIT TIIT, kes andis rohkete fotodega illustreeritud ülevaate kõigist senitoimunud üritustest.

Konverentsi võtme-esinejateks olid sellised kõrgelt tunnustatud teadlased nagu ANTHONY ATKINSON (UK), kes esitas ettekande teemal "*Optimum experiments with sets of treatment combinations: univariate or multivariate?*", ja THOMAS MATHEW (USA), kelle loengu teemaks oli "*Statistical methods for cost-effectiveness analysis: a selected review*". Seekordne konverents paistis silma suure arvu kutsutud esinejate poolest, keda oli tervelt 14: HANSJÖRG ALBRECHER (Šveits), ELJA ARJAS (Soome), BARBARA BOGACKA (Suurbritannia), ABDELHAMID HASSAIRI (Tuneesia), YURIY KHARIN (Valgevene), TOMASZ KOZUBOWSKI (Ameerika Ühendriigid), YAKOV NIKITIN (Venemaa), HANNU OJA (Soome), WOJCIECH PIECZYNSKI (Prantsusmaa), MOGENS STEFFENSEN (Taani), AILA SÄRKKÄ (Rootsi), CHRIS WATKINS (Suurbritannia), NANNY WERMUTH (Saksamaa) ja SILVELYN ZWANZIG (Rootsi). Võib öelda, et kutsutud esinejad, kelle hulgas ligi pooled on meie konverentsidel osalenud ka varem, aitasid tuntavalt hoida konverentsi kõrget teaduslikku taset.

Kokku esitati seekordsel konverentsil 69 ettekannet, millest 15 olid pärit TÜ teadlastelt. Neis käsitleti laia spektrit statistika ja tõenäosuse küsimusi: mitmemõõtmelised jaotused, hindamine ja testimine, valikuuringud, finants- ja kindlustusmatemaatika mudelid ning statistika ja tõenäosuse rakendused erinevatel aladel. Riigiti oli osavõtjate jaotus järgmine: Leedu 9, Türgi 6, Suurbritannia 5, Ameerika Ühendriigid 4, Rootsi 4, Soome 4, Tšehhi Vabariik 4, Saksamaa 3, Läti 2, Itaalia 2, Slovakkia 2, Valgevene 2, Venemaa 2, Kanada 1, Prantsusmaa 1, Taani 1, Tuneesia 1, Šveits 1, Eesti 28 (sh TÜ 23).

Olgu siinkohal toodud ära ka kõik kodumaised esinejad, kellest enamik on Tartu Ülikoolist ning kelle hulgas oli rõõmustavalt palju doktorante.

1. M. Käärik, R. Kangro, L. Muru: *On estimation of insurance claim numbers by combining local regression and distribution fitting ideas.*
2. L. Tee, M. Käärik, R. Viin: *On comparison of stochastic reserving methods.*
3. M. Möls: *The influence of model selection on selected measures of fit.*
4. K. Pärna: *Asymptotically optimal placement of initial centers in k-means clustering.*
5. K. Fischer, K. Läll: *Survival analysis of biobank data: some methodological aspects and examples.*
6. M. Vähi, E. Maasing, E.-M. Tiit: *Defining the population size using the residency index. Case of Estonia.*
7. M. Pihlak: *Applying non-parametric methods on estimation of medical bills pricing limits.*
8. J. Sova, J. Lember: *The existence of infinite Viterbi alignment for PMC models.*
9. M. Gimbutas, J. Lember: *Segmentation of hidden Markov tree models with hybrid decoders.*
10. R. Klement, J. Lember: *On consecutive alignment with priority in random sequence comparison.*
11. A. Krutto: *Parameter estimation of stable laws.*
12. T. Kollo, M. Käärik, A. Selart: *Asymptotic normality of estimators for skew normal distribution.*
13. K. Lumiste: *Using auxiliary information in data collection and in estimation.*
14. N. Lepik, I. Traat: *Estimation and calibration of response probabilities.*

Konverentsi programmikomitee oli rahvusvaheline ning sinna kuulusid Dietrich von Rosen (esimees, Rootsi), Tõnu Kollo (aseesimees, Eesti), Tomáš Cipra (Tšehhi Vabariik), Krista

FISCHER (Eesti), REMIGIJUS LEIPUS (Leedu), SIMO PUNTANEN (Soome), JÚLIA VOLAUFOVÁ (Ameerika Ühendriigid).

Ürituse organiseerijad püüdsid külalistele pakkuda võimalusi tutvuda ka teiste osavõtjatega, samuti Tartu linnaga ning meie maaga laiemalt. Avapäeval, pärast teaduslikke sessioone, toimus jalutuskäik kesklinnas, millele järgnes vastuvõtt TÜ Ajaloomuuseumi Valges saalis Toomel. Teise päeva õhtupoolikul toimusid aga pikemad ekskursioonid, millest esimene viis Peipsi äärde vanausuliste küladesse Varnjasse ja Kolkjasse ja lõppes õhtusöögiga suurejoonelises Alatskivi lossis ning teine viis Viljandimaa lõunaossa, kus külastati Helme ja Karksi ordulosside varemeid, matkati Teringi rabas ning lõpetati õhtusöögiga uhkes juugend-stiilis Taagepera lossis. Konverentsi pidulik lõpubankett toimus eelviimasel päeval Tartus restoranis Atlantis.

Konverentsi lõpubanketil Atlantises: *key-note* esineja Thomas Mathew (vaskult teine) ja külalised Türgist. Foto: MÄRT MÖLS.

Olgu siinkohal lisatud selline pisidetail, et hoolikalt koostatud konverentsimappi kuulus muu hulgas ka tikutops, mille kaanel ilutseb tsaariaegses Tartu Ülikoolis töötanud statistikaklassiku ÉTIENNE LASPEYRES'I foto. See väike suveniir jäi külalistele meenutama statistikateaduse väärikat ajalugu Tartu Ülikoolis.

Konverentsi ettekanded on nüüdseks ilmunud kahes väljaandes, milleks on ajakiri *Risks* ning *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*.

Ürituse õnnestumisele aitasid kaasa nii suurepärane ilm kui ka organisaatorite pikaajalised kogemused taoliste kohtumiste organiseerimisel. Korralduskomiteesse kuulusid Kalev Pärna (esimees), Meelis Käärik (aseesimees), Kristi Kuljus (konverentsi sekretär) ning liikmed Ene Käärik, Mare Vähi, Natalja Lepik, Imbi Traat, Anne Selart, Märt Möls, Jüri Lember, Kelli Sander, doktorandid Riho Klement, Annika Krutto, Kristi Läll, Liivika Tee ja üliõpilased Kristel Luik, Hanna Läänemets, Marili Zimmermann.

Konverentsi toetasid Tartu Ülikool, TÜ matemaatika- ja informaatikateaduskond ning ajakiri *Risks*, kellele kõigile suur tänu!

Traditsiooniline konverentsitort. Foto: Märt Möls.

Balti matemaatika didaktikute aastakonverents

MADIS LEPIK
Tallinna Ülikool

Balti matemaatika didaktikutel on traditsiooniks pidada igal kevadel oma aastakonverentsi. Seekordne konverents pealkirjaga *Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives* oli järjekorras juba seitsmeteistkümnes ja toimus 6.–7. mail 2016 Tallinna Ülikoolis.

Meie konverentsid on Balti- ja Põhjamaade matemaatika didaktikute ning õpetajakoolitajate oodatud kohtumispaigaks. Osalejad tutvustavad nii oma uurimistöö tulemusi kui ka käimasolevaid arendusprojekte. Seekordse konverentsi fookuses olid digitehnoloogia kiirest arengust põhjustatud muudatused koolimatemaatikas ja selle õpetamises. IT rakendamine loob täiendavaid võimalusi matemaaatika õpetamiseks, aga tingib paratamatult muudatusi ka hariduse sisus, need arengud põhjustavad omakorda muudatusi nii õppekirjanduses kui õpetajakoolituses.

Sellele temaatikale keskendusid ka konverentsi plenaarettekanded. TERJE HÕIM Tartu Ülikoolist pidas ettekande teemal *Innovation in mathematics education: Computer-based statistics project in Estonia* ja Mart Laanpere Tallinna Ülikoolist teemal *Re-thinking Digital Textbooks: Teachers and Learners as Co-authors.*

Konverentsil osales ligi poolsada inimest kaheksast riigist: Eesti, Läti, Leedu, Soome, Rootsi, Norra, Venemaa ja USA.

Konverentsi ettekannete põhjal ilmus Tallinna Ülikooli väljaandena ka artiklite kogumik.

Konverentsil osalejad. Foto: Tõnu Tõnso.

Järjekordne rahvusvaheline topoloogiliste algebrate konverents Tartus

Mart Abel
Tallinna Ülikool/Tartu Ülikool

Ajavahemikul 30. maist kuni 2. juunini 2013 toimus Tartus rahvusvaheline topoloogiliste algebrate alane konverents "*International Conference on Topological Algebras and their Applications 2013*" (lühidalt, "ICTAA 2013"). Seekordne konverents oli pühendatud selle konverentsisarja idee autori ja algataja professor Mati Abeli 70. sünnipäevale.

Sari sai alguse 1999. aastal Tartus toimunud konverentsiga. Ajavahemikus 1999–2008 jõuti antud sama sarja konverentse korraldada Marokos, Soomes, Mehhikos, Poolas, Kreekas ja taaskord Tartus. Etteruttavalt võib öelda, et ka 2014. ja 2015. aastal jätkus konverentsisari konverentsidega Dominikaani Vabariigis ja Iisraelis.

Konverentsil "ICTAA 2013" osales kokku 27 matemaatikut Eestist, Lätist, Soomest, Mehhikost, Moldovast, USA-st, Kanadast, Bangladeshist, Ukrainast ja Kreekast.

Kolme päeva jooksul peeti 18 ettekannet erinevate omadustega topoloogilistest algebratest (lokaalselt kumerad algebrad, lokaalselt pseudokumerad algebrad, osaliselt järjestatud topoloogilised algebrad, C^*-algebrad, Banachi algebrad, Pythagorase topoloogilised algebrad), topoloogilistest poolrühmadest, topoloogilistest ruumidest, bornoloogiast, kihtkondadest, Grassmanni algebratest ja gradueeritud q-diferentsiaalalgebratest.

Ekskursioonid viisid konverentsi osalejad Tartu Ülikooli peahoonesse, kus külastati aulat, kunstimuuseumi ja kartserit, samuti Alatskivi lossi ja Jääajakeskusesse Äksil. Lisaks külastasid klassikalise muusika austajad ka Põhjamaade Sümfooniaorkestri kontserti Vanemuise Kontserdimajas.

Loomulikult ei saanud juubelile pühendatud konverentsi pidada ilma juubilari sünnipäevale pühendatud piduliku õhtusöögita.

Traditsiooniliselt ilmus EMS-i sarjas "*Mathematics Studies*" 2014. aasta alguses ka konverentsi toimetiste kogumik, kus avaldati

11 topoloogiliste algebratega seotud teadusartiklit, milledest 2 on kirjutatud ka konverentsile finantsporbleemide tõttu mitte jõudnud matemaatikute poolt.

Konverentsist osavõtjad banketil kohvikus Vilde.

XIV Eesti Matemaatika Päevad

Kalle Kaarli
Tartu Ülikool

14. Eesti Matemaatika Päevad toimusid Viljandimaal Kopra turismitalus 25.–27. juunil 2014. Korraldajateks olid seekord Tartu Ülikooli matemaatikud, keda veebipõhise registreerimise osas aitas Gert Tamberg Tallinna Tehnikaülikoolist. Peamise töö Kopra taluga suhtlemisel ja rahaliste küsimuste lahendamisel tegi Rainis Haller. Nende ridade autor andis oma panuse ettekandjate leidmise ja päevakava kokkupanemisega.

Päevakavas olid järgmised ettekanded (esitamise järjekorras):

Evely Kirsiaed:	Geomeetriline modelleerimine.
Tiit Lepmann:	PISA 2012 – Eesti tulemused.
Ernst Tungel:	Näide matemaatika rakendamisest mehaanikas – konsooltala siirde arvutamine.
Kristjan Korjus:	Katse muuta radikaalselt Eesti statistikaharidust.
Kaie Kubjas:	Osaliste maatriksite täiendamine astakuga 1 maatriksiteks.
Märt Möls:	Randomiseeritud katsed.
Maris Tõnso:	Tagasiside võimalused juhtimissüsteemide võrrandite lineariseerimisel.
Gennadi Vainikko:	Südamlikud Volterra integraalvõrrandid ja singulaarsed diferentsiaalvõrrandid.
Deivi Taal:	Matemaatika riigieksam – esmakordselt kahetasemeline.
Raili Vilt:	Olümpiaadid – mida neist ootame?

Indrek Zolk:	Mõtteid matemaatika õpetamisest ülikoolis.
Kalle Kaarli:	Projektiivsetest tasanditest, eriti lõplikest.
Margus Pihlak:	Juhuslike suuruste vahelistes seosekordajates peituv info.
Ago-Erik Riet:	Graafide konstrueerimine mängides.

Korraldati küsitlus parima ettekande väljaselgitamiseks, selle tulemusel osutus ülekaalukalt parimaks Märt Mölsi ettekanne.

Toimus kaks vestlusringi: "Millist matemaatilist aimekirjandust vajame?" ja "Matemaatika ellujäämisvõimalused Eestis". Esimest juhtisid Esta Erit, Hele Kiisel ja Kristjan Korjus, teist aga Raul Kangro ja Andi Kivinukk. Uudse momendina meie matemaatikapäevade ajaloos oli kohale kutsutud kirjastuse "Avita" esindaja, kes tutvustas ja müüs päevalistele matemaatika-alaseid populaarteaduslikke trükiseid. Äri läks hästi, mõningaid raamatuid tuli isegi juurde tellida.

Päevadel osalejate arv oli 65, kes küll kõik ei olnud kohal algusest lõpuni. Konkurentsitult oli suurim esindus, 28 matemaatikut, Tartu Ülikoolil. Tallinna Tehnikaülikoolist oli kohal 7 ja Tallinna Ülikoolist 2 matemaatikut. Varasemate aastatega võrreldes osales vähem õpetajaid, ainult 12. Välismaalt olid tulnud KAIE KUBJAS (Aalto Ülikool, Helsingi), ERIK PAEMURRU (Edinburghi Ülikool) ja MARJU PURIN (St. Olaf College, USA) koos oma elukaaslase KOSMAS DIVERISE ja viimase pojaga. Tore, et osavõtjate seas oli rohkesti üliõpilasi ja mitte ainult doktorante. Teiselt poolt, põlvkondade vahelise sideme kindlustasid mitmed eakad kolleegid, nende seas akadeemik GENNADI VAINIKKO.

Kuigi üritus oli väga töine, jätkus aega ka meelelahutuseks. Palju elevust tekitasid EVELY ja IVO KIRSIAIA ette valmistatud võistlusmäng ja JÜRI LEMBERI korraldatud viktoriin. Esimesel õhtul said kõik soovijad maitsta suitsusauna võlusid. Saunaõhtu on saanud meie matemaatikapäevade pärisosaks, aga usun, et Kopra talu suitsusaun järvekese kaldal on üks parimaid selle ürituse ajaloos. Erilise elamuse valmistas saunalistele 72-aastane veteranmatemaatik MATI TOMBAK demonstreerides saltoga vettehüpet.

Teise õhtu aitasid sisustada Valdis Laane poolt kohale kutsutud rahvamuusikud Kadri ja Marju, kes meenutasid ununema kippuvaid ringmänge ja tutvustasid ka uusi. Kellelgi ei õnnestunud oma kohale istuma jääda.

Rahvamuusikud Kadri Laube ja Marju Varblane.
Fotod: Peep Uba.

Arvan, et neile, kes ei leidnud võimalust päevadel osalemiseks, võib ainult kaasa tunda. Järgmised Eesti Matemaatika Päevad usaldati korraldamiseks Tallinna Tehnikaülikooli matemaatikutele.

XV Eesti Matemaatika Päevad

Otu Vaarmann
Tallinna Tehnikaülikool

XV Eesti matemaatikapäevad leidsid Eesti Matemaatika Seltsi ja Koolimatemaatika Ühenduse korraldamisel aset seekord Märjamaa lähedal Luhtre turismitalus (Nõmmeotsa küla, Märjamaa vald) ajavahemikul 26.–28. juunini 2016. aastal ning nende päevade tegevkorraldaja oli Tallinna Tehnikaülikooli matemaatikainstituut. Osavõtjaid oli 45 ringis.

Märjamaa on linnatüüpi alev Kesk–Eestis, Via Baltica ja Haapsalu-Paide–Tartu maantee ristumiskohas, endise (ajaloolise) Läänemaa väravas sisemaale. Märjamaa vald kuulus varasematel aegadel koos naabervaldade Kullamaa ja Vigalaga Läänemaa alla, praegu kuuluvad Märjamaa ja Vigala vald Raplamaa koosseisu, Kullamaa vald aga endiselt Läänemaale. Nende kolme valla tunnuslauseteks on: Märjamaal pole märga, Kullamaal pole kulda ega Vigalal viga. Esimene kirjalik teade seoses Märjamaaga pärineb aastast 1341. Maakoha nimetus tuleneb suure tõenäosusega nimest "Maarjamaa", mida kinnitavad ka mitmed kirjalikud allikad, kuid välistada ei saa nime Märjamaa pärinemist ka maakoha looduslikust omapärast nn Järta järvedest, mis kujutavad endast karstialal paiknevaid ja veerikkal ajal ohtralt veega täituvaid suuri veekogusid, mis aga hiljem ilmastikuolude muutumisel jäävad kiiresti veetuks nagu muinasjuttudeski, milles lendavatest järvedest pajatatakse (sellel nähtusel on midagi sarnast ja ühist ka Nabala nõiakaevuga). Nende iseäralike loodusnähtustega oleks saanud mingil määral tutvuda ka 27. juunile kavandatud jalgsimatkal, mis aga vihmase ilma tõttu sai ümbermuudetud põhiliselt bussiringsõiduks (millel bussirooli võttis aga enda hoole alla Märjamaa valla volikogu esimees Urmas) Luhtre turismitalu ja Haimre mõisa lähiümbruses.

Traditsiooniliselt on Eesti Matemaatika Päevad olnud mitmetahulissed ja püüdnud täita mitmeid rolle: konverents, koolitus, visioon, erialane suhtlus, kusjuures ei ole puudunud ka võimalike arengute ja tulevikunägemuste analüüs ja kõige selle juures ei ole unustatud sporti, saunamõnusid ja meelelahutust. Samuti on saanud juba tavaks, et kui tegevkorraldaja on Tallinnast, siis kohtumispaik leitakse reeglina kas Põhja- ja Lääne-Eestist või saartel, kui aga Tartust, siis Lõuna-Eestist või Peipsi kaldal. Peale hea logistilise asendi torkas Luhtre turismitalu silma rikkalike tegevus- ja ajaviitmise võimaluste poolest, kuid need teenused koos ööbimise ja toitlustamsega osutusid küllaltki kalliks (rahanõudvaks). Kuid siinjuures tuleb arvestada, et hinnad Tallinna ümbruses ja suurte maanteede ääres paiknevates söögi- ja majutuskohtades ongi kõrgemad. Luhtre turismitalu asub nn Eesti toiduteel, millel on üle Eesti 120 toidupakkujat. Suvekuudel pakub Luhtre turismitalu 3–4 korral nädalas läbisõidul olevatele välisturistide gruppidele kerget einet, Saksamaa gruppidele esineb iga kord ka Märjamaa rahvatantsurühm Hopsani. Nii tuli ka korraldajatel nihutada avapäeva ettekannete ja vaheaegade aegu, et osa saada Saksamaa gruppidele esitatavatest etteastetest.

Et osavõtumaksu taskukohasemaks muuta ja hõlbustada selle ürituse suhtes paindlikumat ja mõistvamat hoiakut võtta, pakkusid korraldajad välja 7 erinevat teenusepaketti. Võib-olla ei olnud need matemaatikapäevad just kõige ootusepärasemad, ja kas nad peavadki seda olema, on ju pisut omanäolisemad paremad hinge virgutajad.

Silmas pidades, et diskussiooni tekitamine matemaatikute seas ei ole kerge ülesanne ja ei õnnestu alati ning arvesse võttes, et kuigi varasematel läbirääkimistel ühe tulevikku vaatava vestlusringi korraldamise üle nendel matemaatikapäevadel otsest vastuseisu ei olnud, umbusku aga küll, siis lootuses anda planeeritavale laiapõhjalisele arutelule rohkem hoogu ja aktiivset vaimu sai appi kutsutud eksperte väljaspoolt seltsi koosseisu. Kuid hoolimata välisekspertide jõupingutustest mõttevahetusest eriti asja ei saanud ja elavat diskussiooni ei tekkinud, kuigi põhjuseid nagu olnuks: pidev reformimine, liigne projekti- ja grandipõhisus, teaduse rahastamine jne, mis on tekitanud inimestes ebakindlust. Selles võib muidugi süüdistada ja etteheiteid teha ka tegevkorraldajatele, kuid kahjuks või õnneks neile liigne suupaotamine ei sobigi, pigem tagasihoidlikum ja erapooletum mentori roll.

PÄEVAKAVA

Pühapäev, 26. juuni

12.00–13.00 Saabumine, majutamine

13.00–14.00 Lõunasöök

14.00–14.15 Avamine ja audiplomite üleandmine

14.15–15.00 Evald Übi "Algoritm, mis juhib maailma"

15.00–15.45 Liisi Kerik "Turvaline ühisarvutus"

15.45–16.00 Vaheaeg

16.00–16.45 Leo Võhandu "Matemaatika lihtsusest"

16.45–17.00 Vaheaeg

Enne vestlusringi esitavad veel kaks eksperti lühidalt oma nägemuse matemaatika osast ühiskonnas.

17.00–17.30 Maris Lauri

17.30–18.00 Tarmo Soomere

18.00–19.00 Vestlusring "Matemaatika saatusest uuenduste keerises". Vestlusringi juhivad ja suunavad Raul Kangro ja Andi Kivinukk

19.00–20.00 Õhtusöök

20.00– Meelelahutuslik tegevus, jalakeerutus unarusse jäänud pillilugude saatel (elav muusika, lõõtsapillidel ja akordionil esitatuna)

Esmaspäev, 27. juuni

8.30–9.30	Hommikusöök
9.30–10.15	KRISTEL MIKKOR "Uuendused matemaatika õpetamisel Tartu Ülikoolis"
10.15–11.00	TERJE HÕIM "Milliseid uusi võimalusi pakuvad arvutid matemaatika õppimiseks ja õpetamiseks meie koolides"
11.00–11.45	ELO REINIK "Fraktaalgeomeetriast algajatele"
11.45–12.30	TIIA RÜÜTMANN "STEM valdkonna õppeainete mõjus õpetamine"
12.30–13.00	OLGA ORLOVA "Matemaatika õpetamisest USA kõrgkoolides"
13.00–14.00	Lõunasöök
14.00–17.00	Meelelahutuslik ja sportlik tegevus, matk Märjamaa lähiümbruses
17.00–17.30	ANDI KIVINUKK "Bibliomeetriast - tsiteerimine kui nakkushaigus"
17.30–18.00	KALLE KAARLI, ANDI KIVINUKK ja OTU VAARMANN "Kolmkümmend aastat Eesti Matemaatika Päevi"
18.00–19.00	Vestlusring koolimatemaatika teemadel. Vestlust hoiavad hoole ja kontrolli all HELEN KAASIK ja HELE KIISEL.
19.00–20.00	Õhtusöök
20.00–	Meelelahutuslik tegevus, saun

Teisipäev, 28. juuni

8.30–9.30	Hommikusöök
9.30–10.15	LAURI TART "Reesi maatrikspoolrühmad ja osaliselt järjestatud poolrühmade Morita ekvivalentsus"
10.15–11.00	RASMUS ERLEMANN "Riemanni dzeetafunktsioonist"
11.00–11.45	GERT TAMBERG "Suure dünaamilise ulatusega pildid"
11.45–12.00	XV EMP lõpetamine
12.00–	Lõunasöök, lahkumine

Tagasivaateliselt, kuigi EMP-de sünnilugu seostatakse eeskätt kunagise ENSV TA Küberneetika Instituudi töötajate, nüüdseks meie hulgast lahkunud, IVAR PETERSENI ja TEET TOBIASE nimega, alustaksin ma siiski veidike kaugemalt. Möödunud sajandi 50-ndatel ja isegi 60-ndate alguses oli sõna küberneetika ja selle mõiste NSVL-s valdavalt veel tabuteema. Küberneetikanimeline uurimisinstituut asutati Eestis 1960. aasta 1. septembril, asukohaga Tallinnas, Sakala tn 3. Kas ta oli NSVL-s esimene sellenimeline, see pole käesolevas kontekstis enam oluline, kuid mainin siiski, et kuulu järgi olevat grusiinid selles võidujooksus eestlastest pisut kiiremadki olnud. Igatahes aastaid põlu ja peaaegu keelu all olnud nimetus ja teemakäsitlus tõmbas hulganisti andekaid inimesi ligi, sest keelatud vili on magus. Matemaatikas sihteseadvateks ja tooniandvateks isikuteks Küberneetika Instituudis olid tollal Ivar Petersen ja temast täpipealt aasta võrra noorem SULEV ULM (sündinud 26.07.1930), kes oli igati värvikas kuju, kuid kelle harjumused ja elukombed tegid ta kergesti haavatavaks. Kaine peaga oli ta väga vagur, talle meeldis jalutada mõtlikult koridoris edasi-tagasi, suits sageli hambus ja jutule naljalt kedagi ei võtnud, kui aga juhtumisi jutule soovija alustas oma vestlust matemaatikast, siis Sulevi nägu lõi särama ja vestlus võis tüütuseni pikale venida ning ka naljaviskamine ei olnud seejuures taunitav. Tema ülemuseks ja ka mingis mõttes rivaaliks oli Ivar, kes oli irooniline ja sarkastilise väljenduslaadiga inimene ja enim rakenduslikule osapoolele pühendunud matemaatik. Sulevit matemaatika rakendused nii väga ei köitnud ja ka praktilistes asajaajamistes ta eriti tugev ei olnud. Nad mõlemad küll kaitsesid 1970. aastal tolleaegses mõiste VAK-i doktoriväitekirja, saatuse tahtel läks aga nii, et viieaastase ootamise järel, mis tol ajal oli küllaltki tavaline, sai Sulev VAKist oma doktorikraadile kinnituse, aga Ivaril jäigi see saamata, mis lisas pinget nende omavahelistesse suhetesse. Küberneetika Instituudi matemaatikute kogukond jaguneski põhiliselt kaheks töörühmaks: Ivar Peterseni statistika ja katsete planeerimise ning Sulev Ulmi arvutusmeetodite töörühmaks, mille uurimisorbiidis olid põhiliselt teoreetilised probleemid, peamisteks uurimissuundateks suurte süsteemide dekomponeerimine, operaatorvõrrandid ja üldistatud pöördoperaatorid. Meid viiekesi (A. PIHLAK, A. VIIL, T. TOBIAS, A. USTAAL, O. VAARMANN) suunati TRÜ lõpetamise järel 1961. aastal tööle TA Küberneetika Instituuti, kus meist said Ivar Peterseni käealused. Teet Tobiasest sai sama aasta sügisel I. Peterseni juhendatav aspirantuuris, O. Vaarmannist aga peagi nn Sulev Ulmi poiss. Kuna eduka uurimistöö tagajärjel Sulevi rahvusvaheline, rääkimata NSVL-i sisesest, tunnustus aina kasvas, siis nn Ulmi poisid otsutasid tema tuntust ära kasutada ja Eesti matemaatikute paremaks nähtavale toomiseks hakata korraldama arvutusmeetodite ja optimeerimise alaseid konverentse, mis oma sisu ja osavõtjate laiahaardelisuse poolest kujunesid mini-üleliidulisteks ja esimene neist toimuski 1978. aasta juunikuu alguses Pärnus. Sulevile jäigi osavõtt selle seeria konverentsidest esimeseks ja viimaseks. Sulev lahkus meie hulgast raske haiguse tagajärjel 1978. aasta detsembris ja enne jõule sängitati ta maamulda Tallinnas, Pärnamäel.

Mulle tundub, et asjad arvutusmeetodite vallas nii sisu kui koostöö mõttes liikusid tollal küllaltki edukalt. Sama aasta sügisel ärkas elule vabariiklik seminar "Arvutusmeetodid", mille avakokkutulek leidis aset 1978. aasta 31. oktoobril Tartus, Liivi tn 2. Selle seminari eesistuja kohustused võttis enda kanda GENNADI VAINIKKO, kes oli avaistungi kokkukutsuja ja jäi sellesse rolli ka edaspidi ning Tallinna-poolse korraldaja volitused usaldati O. Vaarmannile. Sellest seminarist said osa väga paljud, alates üliõpilasest akadeemikuteni välja, ning osavõtjaid ja esinejaid oli sageli ka väljaspoolt Eestit. Oli tavapärane, et kui kellelgi õnnestus oma väitekirja oponendina nõusse saada Gennadi Vainikko, siis reeglina dissertant esines sellel seminaril ettekandega ja kollektiivse oponendina tuli sageli kõne alla TA Küberneetika Instituut. Hilisemal ajal võtsid sellest seminarist osa või esinesid ettekannetega juba paljud väljaspoolt Nõukogude Liidu piire ja peale taasiseseisvumist sai see tavapäraseks. Arvutusmeetodite seminar töötas regulaarselt ja esialgses formaadis kuni 1992. aasta aprillini, kui Tartus esines sellel seminaril professor VIDART THOMEÉ Chalmersi ja Göteborgi ülikoolist.

Läheme nüüd ajas tagasi 1980-ndatesse, kui oli toimunud juba vähemalt neli arvutusmeetodite ja optimeerimise alast konverentsi (Pärnus, Haapsalus, Viljandis, Tallinnas). Kuigi matemaatikapäevade korraldamise idee oli juba ammu ringelnud paljude peas, polnud siiani veel tegudeni jõutud, vaatamata füüsikute heale eeskujule, kes olid korraldanud füüsikapäevi juba mitmel korral. Arvutusmatemaatikute edukas tegutsemine konverentside koraldamisel hakkas üha enam häirima statistika töörühma inimesi Küberneetika Instituudis. Kui ühel 1985. aasta hilissügisesel nn tootmisnõupidamisel tuli arutlusele konverentside rahastamine ja Ulmi poisid esitasid oma soovi järjekordse konverentsi korraldamiseks põhjendusega, et meil on head korraldamise kogemused ja töised suhted paljude teiste liiduvabariikide esindajatega, siis selle peale Ivar pahandas ja väitis sarkastiliselt, et ega ida poolt tulijaid töösuhted ja Eestis tehtav matemaatikaalane uurimistöö ei huvita, vaid ikka kokkupuude läänelikuma elulaadiga. Tuleb nõustuda, selles väites oli oma tõetera sees. Selle peale mainis keegi meist (arvatavasti oli see Teet), mis me jampsime nende ida poolt tulijatega, parem teeme üksnes oma inimestega midagi ja seda just Eesti läänepoolses osas või saartel. Selles, kas just sõnasõnalt nii väljendati pole ma enam kindel, kuid mõte oli küll selline. Sel ajal olid omavahelised väljaütlemised vähem silmakirjalikud ja poliitkorrektsuse mõistet ei tuntud. Nendest väljaütlemistest innustust saanud, täitus ametlikule nõupidamisele järgnenud aeg mõnusa naljaviskamisega idapoolsete arvel. Selle nõupidamise peamine tagajärg oli see, et jõuti konsensuslikule järeldusele-lahendusele, et matemaatikapäevad korraldame Saaremaal ja programmi sisuline koostamine jääb peamiselt statistikute mureks, aga korralduslik pool (busside tellimine, piiritsooni lubade hankimine, saunaahju kütmine jms) jääb rohkem Ulmi poiste hoole alla. Nii juhtuski, et esimesed matemaatikapäevad toimusidki 7.–10. juunil 1986. aastal Saaremaal, Mändjala kämpingus.

Liigne vagurlus ja leplikkus ei toimi alati kõige paremini. Mõistlikkuse piires omavaheline vägikaika vedamine ja sõnelemine on mõnikord hädavajalik, et asjad kiiremini või üldse liikuma hakkaks. Nii oli ka kerge peretüli vajalikuks tõukejõuks ja katalüsaatoriks selliste sündmuste puhul nagu Eesti Matemaatika Päevad. Elu viivad edasi ikka pahad poisid, mitte pupujukud. Praegu on nii, et konflikti ei ole, aga koostööd ka eriti ei ole.

Pikaajaline sotsiaalne isoleerumine tekitab väära ja moonutatud eneseteadvuse. Väikestel oludel on ainult üks paratamatu omadus: nad teevad väikeseks ja väiklaseks. Tuleb üle olla mõtteerinevustest: mis rikkale loomulik, see vaesele imelik; noortele tundub, et nendega saabub parem maailm, vanematele, et nendega koos kaob jne ning püüda leida kasutuskõlbulik kompromiss ühistele muredele. Tähelepanu ei vääri mitte ainult need, kes raskusi ületavad, vaid ka need, kes neid loovad. "Ära ole liiga magus, siis söövad teised su ära! Ära ole ka liiga kibe, siis nad sülitavad su peale!" (Afganistani vanasõna).

KMÜ Suvepäevad Saaremaal 2013

PAAVO KUUSEOK
Tartu Ülikool

13.–15. augustil 2013 Saaremaa Ühisgümnaasiumis (SÜG) toimunud Eesti Matemaatika Seltsi Koolimatemaatika Ühenduse suvepäevade teemad võib jagada kolmeks:

- projektitöö SÜG-is ja mida oleks teistel koolidel sellest kasulikku üle võtta;
- uued teemad õppekavas;
- üldharivad teemad.

Esimesel päeval tutvustasid SÜG-i õpetajad ANNE TEIGAMÄGI ja DIANA ÕUN projektitöö võimalusi läbi oma kogemuse. Anne Teigamägi (pildil vasakul) rääkis SÜG-i juurde loodud Keskkonnahariduse Keskuse saamisloost ja seal toimuvatest õpitubadest. Esinejad said tänutäheks pudeli ainulaadset Saaremaal Leedri külas Orbu talus toodetud kadakasiirupit.

Diana Õuna ettekande teemaks oli SÜG-is juba paarkümmend aastat toimuv 11. klasside tehtav ligi pooleteisttunnine kabareeetendus, millega nad teevad sõltuvalt lennust ca 10 etendust. Ta keskendus sellele, mis käib sinna juurde klassijuhataja pilgu läbi ehk kõik see, mis jääb kaadri taha. Õhtu lõpetuseks vaatasime üht täispikkuses paaritunnist etendust ka video vahendusel.

Teist päeva alustas külaline Florida Atlandi Ülikoolist Terje Hõim, kes tutvustas oma hobi etnomatemaatikat.

Jätkas Ako Sauga Majandusmatemaatika kursuse ja laia matemaatika 14. kursuse materjalidest.

Teise päeva lõpetas ekskursioon nendesse Saaremaa paikadesse, kuhu õpetajad klassiekskursiooniga tavaliselt ei satu. Mis Saaremaa tuur ta muidu oleks, kui ei viiks kohtadesse, mis merega seotud. Meie giidid Aado Haandi ja Ülo Roos (Aadu ja Ülu) vallutasid oma muheda jutuga paljude daamide sümpaatia. Palju nende jutus tõtt oli jääb igaühe enda otsustada.

Pildil Aadu ja Ülu (vasakul) Veere sadamas traali meeskonnaga juttu ajamas. Kuidas nad meie saabumise ajaks Saaremaa sadamast kruiisilaeva lahkumise suutsid kokku leppida, jäigi arusaamatuks.

Kolmandal päeval räägiti kohustuslikuks saanud loovtöödest ning uurimistöödest üldisemalt ja ka matemaatikat puudutavatest uurimistöödest. SÜG-i kogemustest uurimistööde kirjutamisel ning selles vallas olulistest momentidest rääkis Marek Schapel.

Kaht sel aastal valminud uurimistööd matemaatika ja IT valdkonnast tutvustas Paavo Kuuseok.

Edasi kasutati aktiivselt vaba mikrofoni arutlemaks uurimistööde temaatikat, millest paljud 70-st osalejast ka aktiivselt osa võtsid.

KMÜ Suvepäevad Palamusel 2015

HELE KIISEL
Hugo Treffneri Gümnaasium

EMS Koolimatemaatika Ühenduse 2015. aasta suve täiendkoolitus toimus 17.–19. augustil Jõgevamaal, Palamuse Gümnaasiumis. Kolmel päeval kuulati ettekandeid, jälgiti esinejaid ja tantsiti ise, arutati ja analüüsiti ainekava juurde kuuluvat õppeprotsessi kirjeldust, külastati Jõgevamaa kauneid ja huvitavaid kohti, osaleti psühhobussi katsetes, valmistati liivaga kaarte ja käidi nutitelefoniga orienteerumas.

Ettekanded puudutasid matemaatika õpetamist ja matemaatika vastu huvi äratamist, andekat last, kutseomistamist. Tutvusime uute arvuti ja telefoniga läbiviidavate nutiharjutuste ja võistlustega. Väga suure huviga kuulati KRISTI KREUTZBERGI muljeid Inglismaal Wymondhami kolledžis õpetamisest.

Osalejad, keda oli rohkem kui 80, jäid suvepäevadega väga rahule. Palamuse kooli pere ja Luua Metsanduskool olid väga head võõrustajad. Suur tänu ürituse korraldajatele eesotsas EHA KULLAGA. Järgmised Koolimatemaatika Ühenduse suvised koolituspäevad toimuvad 2017. a. Valgamaal.

XLIII matemaatikaõpetajate päevad

Hannes Jukk
Tartu Ülikool

Pealkiri on õige matemaatiline arvaks nii mõnigi võõras, sest algab tähega X. Siin on asi muidugi teine, sest tegemist on järgarvuga, mis tähistab sel korral järjekorras 43-ndat matemaatikaõpetajate kokkusaamist. Niisiis 11.–12. novembril 2016. aastal toimusid Rapla Ühisgümnaasiumis iga-aastased matemaatikaõpetajate sügispäevad.

Raplas tervitas sadakonda saabunud õpetajat Rapla Ühisgümnaasiumi direktor Imbi Kalberg, kes ka ise on hariduse poolest matemaatika õpetaja. Professor Andres Keevallik rääkis avaettekandes väga elavalt sellest, millist rolli matemaatika on tema elus mänginud.

Matemaatikaõpetajate päevadel oli kahel päeval erinevaid ettekandeid. TÜ doktorant Carita Hommik tutvustas arvutipõhise statistika piloteerimise vahetulemusi. Anu Palu ja Kaja Mädamürk jagasid teavet selle kohta, kuidas on õpitulemused seotud õpetamise viiside ja õpilaste motivatsioonidega. Kädi Alanurm ja Kerttu Kruusma tutvustasid oma õpetajakoolituse lõputöid. Kädi oli uurinud tekstülesannete lahendamise ja õpetamise visualiseerimise võimalusi ja vahendeid. Kerttu rääkis tõenäosuse ja statistika õpetamise ajaloost koolimatematemaatikas, Eestis. Elo Reinik tegeles ühe-näitleja-tükiga – teemaks oli fraktaalid ja ta tutvustas uue raamatu kontseptsiooni. Praeguseks on asi läinud hästi ja on teada, et raamat on võetud ühe kirjastuse poolt vastu avaldamiseks. Huvitava ettekandega esines Tõnu Tõnso geomeetria valdkonnast, täpsemalt Feynmani kolmnurgast. See oli eriti huvitav nendele õpetajatele, kelle õpilased käivad matemaatikavõistlustel. Esitluski oli loodud sobival kombel, kasutati dünaamilise geomeetria programmi GeoGebra. Nagu tavaliselt oli selgi korral üheks rubriigiks Tutvustamine. SA Innovest olid tulnud Piret Simmo, Aet Möllits ja Deivi Taal, kes rääkisid 6. klassi matemaatika e-tasemetööst ning e-ülesannetekogust. See teema puudutas tegevõpetajaid otseselt ning tekitas vastakaid arvamusi. EMS Koolimatemaatika Ühenduse liider Hele Kiisel sai kiita ühendust ja selle aktiivset tegutsemist. On näha, et palju koolimatemaatikas ei toimu, kui selles poleks kaasa löönud ühenduse liikmed. Taas nägime noori ettevõtlikke õppevara loojaid, Sebastian Pikand ja Kenneth Pohl, kes reklaamisid Foxcademy õppeplatvormi. Sel on juba mõningane kasutajaskond. Õpetajad saavad seal näha reaalajas õpilaste tegutsemist ning õpilased saavad huvitavat õppematerjali, sealjuures ülesannete lahendustele tagasisidet. Sirje Pihlap ja Sirje Sild veavad õpilasvõistlust “Märka matemaatikat”. Nägime eelmise aasta uhkemaid õpilastöid, aga ka järgmise, GeoGebraga loodava tantsuvõistluse tutvustust. Rain Siemer rääkis portaalist Taskutark.ee, kuhu kogutakse materjali ning otsitakse kaasalööjaid.

Kahepäevase istumise juurde on alati kuulunud üks väike pidu. Selgi korral esinesid kohaliku kooli õpilased. Rapla on kuulus selle poolest, et sealt on pärit mitmeid tuntud lauljaid. Meeleoluka õhtusöögi juurde sai kuulata duetti, Piia Põder ja Morten Langi.

Õpetajate päevade lõpetamisel kuulutati välja õpetajatöös või õppematerjalide loomisel silma paistnud inimesed, kellele antakse detsembris üle Gerhard Rägo nimelised medalid. Viimaks anti üle “teatepulgaks” olevad küünlad järgmiste päevade korraldajatele Virumaalt.

Tänada tuleb korraldajaid. Raplas toimetati ladusalt, sest liidriks oli tõhus Leen Väränen. Koolimatemaatika kogumiku järjekordse sisu eest vastutas USA-st tohutu töövõimega Terje Hõim, keda toetas TÜ matemaatika didaktik Sirje Pihlap.

Matemaatikaõpetajad Rapla Ühisgümnaasiumis

PREEMIAD JA AUTASUD

Riiklikud preemiad

2013

ÜLO LEPIK – Eesti Teaduste Akadeemia Harald Kerese medal astronoomia, füüsika ja matemaatika alal.

TARMO SOOMERE – riigi teaduspreemia tehnikateaduste alal uurimuste tsükli "Merelt lähtuvate ohtude kvantifitseerimine ja minimeerimine Läänemere ranniku kontekstis" eest.

2014

EVE OJA – riigi teaduspreemia täppisteaduste alal uurimuste tsükli "Operaatorideaalid ja tensorkorrutised Banachi ruumide struktuuri-uuringutes" eest.

2015

HELE KIISEL – Vabariigi Presidendi hariduspreemia.

TARMO UUSTALU – riigi teaduspreemia täppisteaduste alal uurimuste tsükli "Matemaatilised struktuurid funktsionaalprogrammeerimises" eest

2016

ÜLO LEPIK – riigi teaduspreemia pikaajalise tulemusliku teadus- ja arendustöö eest.

RAILI VILT – Vabariigi Presidendi reaalteaduste eripreemia

Eesti Matemaatika Seltsi preemiad

Arnold Humala preemia

2013 – Aleksei Lissitsin, teadusartikli "*A unified approach to the strong and the weak bounded approximation properties of Banach spaces*" eest.

2014 – Erge Ideon, uurimuse "Rajaülesannete lahendamine ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetodil" eest.

2015 – Johann Langemets, doktoritöö "Diameeter-2 omadusega Banachi ruumide geomeetriline struktuur" eest.

2016 – Silja Veidenberg, uurimuste tsükli "Tõkestatud aproksimatsiooniomaduste ülekandumine Banachi ruumide kaasruumidesse" eest.

Üliõpilaspreemia

2013 – Ksenia Rozhinskaya, bakalaureusetöö "$M(a, B, c)$-ideaalid Banachi ruumides" eest (juhendaja Indrek Zolk).

2014 – Rihhard Nadel, bakalaureusetöö "Diameeter-2 omadustega Banachi ruumide kaasruumide kirjeldused oktaeedrilisuse abil" eest (juhendajad Rainis Haller ja Johann Langemets).

2015 – Kristo Visk, bakalaureusetöö "Permutatsiooni-koodid ja allikakodeerimine" eest (juhendaja teadur Ago-Erik Riet).

2016 – Andre Ostrak, bakalaureusetöö "Lipschitzi-vaba Banachi ruumi oktaeedrilisus" eest (juhendajad Rainis Haller ja Märt Põldvere).

Publikatsiooniauhind

2013 – Aleksei Lissitsin, artikli "*A unified approach to the strong and the weak bounded approximation properties of Banach spaces*" (Studia Mathematica 211, 2012, lk. 199–214) eest.

2015 – Lauri Tart, artikli "*Characterizations of strong Morita equivalence for ordered semigroups with local units*" (Mathematica Slovaca 64, 2014, lk. 789–808) eest.

Gunnar Kangro kõrgkooliõpiku preemia

2013 – Arvet Pedas ja Gennadi Vainikko, kõrgkooli matemaatikaõpiku "Harilikud diferentsiaalvõrrandid" (2011, Tartu) eest.

Gerhard Rägo medal

2013

Malle Eglit – Viljandi Gümnaasiumi matemaatikaõpetaja

Marina Mets – Tallinna Läänemere Gümnaasiumi matemaatikaõpetaja

Härmel Nestra – Tartu Ülikooli programmeerimiskeelte dotsent

2014

Tiit Lepmann – endine Tartu Ülikooli koolimatemaatikakeskuse juhataja, emeriitdotsent

Anne Lillepea – Paide Ühisgümnaasiumi matemaatikaõpetaja

Kärt Matiisen – Kose Gümnaasiumi matemaatikaõpetaja

Anne Reiljan – Võru 1. Põhikooli matemaatikaõpetaja

Piret Viil – Rõuge Põhikooli matemaatikaõpetaja

2015

Maksim Ivanov – Tartu Ülikooli teaduskooli matemaatikaõppe peaspetsialist ja Tartu Annelinna Gümnaasiumi matemaatikaõpetaja

Raul Kangro – Tartu Ülikooli matemaatilise statistika instituudi dotsent

Urve Olesk – Jõgevamaa Gümnaasiumi matemaatikaõpetaja

Anne Oru – Kohtla-Järve Järve Gümnaasiumi matemaatikaõpetaja

Malle Saks – Tartu Erakooli matemaatikaõpetaja

2016

Tiina Bender – Kuusalu keskkooli matemaatikaõpetaja

Anu Oks – Prantsuse lütseumi matemaatikaõpetaja

Enno Pais – Tallinna Tehnikaülikooli rakendusmatemaatika õppetooli endine lektor

Deivi Taal – SA Innove matemaatika peaspetsialist

Heldena Taperson – Tallinna Inglise kolledži matemaatikaõpetaja

Muud tunnustused

2013

Gennadi Vainikko – Tartu Ülikooli väike medal seoses 75. sünnipäevaga.

Imbi Traat valiti Umeå Ülikooli audoktoriks, promoveerimine 19.10.2013 Umeås.

Cliona Georgia Dalberg pälvis Albert Pulleritsu nimelise noore statistiku preemia oma bakalaureusetöö "*Imputation of inventories in Estonian Commercial Register*" eest.

Givi Kupatadze magistritöö "*Taxpayers' Index*" võitis *Grand Prix* uute ideede võistlusel *Think Tank Dragon Den*, mis peeti konverentsi *10th European Resource Bank. The Viennese Congress "Milestones for an Open Europe"* raames Viinis 07.–09.06.2013.

2014

Kalle Kaarli – Tartu Ülikooli suur medal.

Leiki Loone, Ülo Lumiste – Tartu Ülikooli väike medal

Peeter Oja – Tartu Ülikooli aumärk

Kairiin Kütt – Albert Pulleritsu nimeline noore statistiku preemia magistritöö "Leibkonnad ja perekonnad registripõhises rahva ja eluruumide loenduses" eest.

2015

Uno Hämarik, Ene Käärik – Tartu Ülikooli väike medal

Arvet Pedas, Jüri Lember, Kalev Pärna, Mare Vähi – Tartu Ülikooli aumärk

Johann Langemets – Tartu Ülikooli aasta õppejõu auhind loodus- ja täppisteaduste valdkonnas

Kristel Mikkor – Tartu Ülikooli aasta programmijuhi auhind (matemaatika eriala bakalaureuse-, magistri- ja doktoriõppe kavad)

Imbi Traat valiti IASS (*International Association of Survey Statisticians*) asepresidendiks järgmiseks kaheks aastaks.

Imbi Traat valiti Soome Statistikaseltsi (*Suomen Tilastoseura*) auliikmeks.

2016

Viktor Abramov, Mati Kilp – Tartu Ülikooli väike medal

Raul Kangro, Urve Kangro – Tartu Ülikooli aumärk

Arvo Kaldmäe – Eesti Teaduste Akadeemia presidendi I eripreemia elegantseima üliõpilastöö eest 2016. aasta üliõpilaste teadustööde riiklikul konkursil

VARIA

Matemaatika-informaatikateaduskond Tartu Ülikooli struktuurimuutuste tõmbetuultes 2013–2016

TÕNU KOLLO
Tartu Ülikool

Aastal 2013 kuulus teaduskonda kolm instituuti:

- matemaatika instituut,
- matemaatilise statistika instituut,
- arvutiteaduse instituut.

Nende tegevust koordineeris dekanaat eesotsas dekaan prof. MATI KILBI ja prodekaan prof. VARMO VENEGA. 1. märtsil 2013 täitus Mati Kilbil kolmas valimisperiood dekaanina ja veebruaris toimunud koosolekul valiti kolmeks aastaks dekaaniks prof. TÕNU KOLLO, prodekaanina jätkas Varmo Vene. See oli aeg, mil päevakorral oli jälle ülikooli struktuuri muutmine, suurte teaduskondade moodustamine ja ülikooli uue põhikirja väljatöötamine. Juba 21.03.1995 jõustus Tartu Ülikooli seadus. Seda oli vahepeal juba korduvalt täiendatud ning Seaduse täienduse 03.03.2011 kohaselt hakkasid 1. jaanuari seisuga 2012 ülikooli juhtima Nõukogu, Senat ja Rektor. Senise suurema koosseisuga TÜ Nõukogu asemele tekkis kaks juhtorganit: üheteistkümneliikmeline TÜ Nõukogu ja Senat. Nõukogu moodustas Vabariigi valitsus Tartu Ülikooli (5 liiget), Eesti Teaduste Akadeemia (1 liige) ning Teadus- ja Haridusministeeriumi (5 liiget) esitiste alusel. Strateegilised otsused ülikooli arengu ja rahade jaotamise kohta hakkasid kuuluma Nõukogu pädevusse. Selle kõrvale moodustati senisest nõukogust väiksemaarvuline senat, kelle peamiseks ülesandeks sai õppetööga seotud küsimuste otsustamine. Kuigi rektori valimiskampaania käigus 2012. aastal kinnitasid kõik kolm kandidaati (V. KALM, M. USTAV ja T. MAIMETS), et matemaatika-informaatikateaduskonda ei ähvarda liitmine Loodusteaduste ja Tehnoloogiateaduskonnaga (LOTE), olid need lubadused unustatud õige pea ja surve liitmisele järgnes rektoraadi poolt peatselt. Kui eelmiste rektorite JAAK AAVIKSOO ja ALAR KARISE püüded suurte teaduskondade moodustamiseks takerdusid varasema nõukogu vastuseisu taha, siis uue Nõukogu suunistele viidates moodustati algul valdkonnad kui koordineerivad ühendused. Seejärel tuli aga peagi suund nelja suure teaduskonna moodustamiseks. Suurte teaduskondade – Arstiteaduskonna, LOTE ja Filosoofiateaduskonna jaoks ei tähendanud see erilist muudatust, kui nendega liideti väiksemad – vastavalt Kehakultuuriteaduskond, Matemaatika-informaatikateaduskond, ja Usuteaduskond. Kõige keerulisem oli olukord Sotsiaalteaduste valdkonnas, kuhu hakkasid kuuluma Õigusteaduskond, Majandusteaduskond, Haridus- ja sotsiaalteaduskond koos Narva, Viljandi ja Pärnu kolledžitega. Eelkõige õigusteaduskonna eestvõttel tekkis võimalus teaduskonna nimetuse säilimiseks suure valdkonna sees. Ühtlasi tähendas see seda, et nelja suurt allüksust ei saanud enam nimetada teaduskondadeks, vaid nende nimetuseks sai eesti keeles "valdkond". Seda võimalust nime säilitamiseks kasutasid Õigusteaduskond, Usuteaduskond ja Majandusteaduskond, Kehakultuuriteaduskond seda ei soovinud ja nad hakkasid kuuluma ühe instituudina Meditsiiniteaduste valdkonda. Ainus teaduskond, mille struktuur lõhuti ümberkorralduste käigus, oli Matemaatika-informaatikateaduskond. Arvutiteaduse instituut oli jõudsalt kasvanud viimastel aastatel ja neil oli kindel soov jätkata iseseisva instituudina valdkonna sees. Matemaatilise statistika instituut ja matemaatika instituut olid seevastu valdkonna kõige väiksemad instituudid ja nende iseseisvana jätkamine ei olnud reaalne. Tartu Ülikooli Nõukogu kinnitas TÜ uue põhikirja 29. juulil 2014. See jõustus 1. jaanuaril 2016 ja selles oli fikseeritud ka uus struktuur. Selleni jõudmiseks tuli alustada läbirääkimisi uue matemaaatika ja statistika instituudi moodustamiseks. 2015. aastal sai valmis pärast pikki arutamisi ja läbirääkimisi põhikiri ja 1. jaanuarist 2016 oli matemaatika ja statistika instituut Loodus- ja täppisteaduste valdkonna sees struktuuriüksusena loodud. Instituudi juhatajaks valiti dots. RAUL KANGRO, asejuhatajaks dots. MÄRT PÕLDVERE.

Uus struktuur tõi kaasa ka õppekavade põhjalikuma ülevaatamise. Moodustamise järel kureeris instituut järgmisi õppekavu:

- matemaatika bakalaureuseõpe,
- matemaatilise statistika bakalaureuseõpe,
- matemaatika magistriõpe,
- matemaatilise statistika magistriõpe,
- matemaatika- ja informaatikaõpetaja magistriõpe,
- finants- ja kindlustusmatemaatika magistriõpe,
- finantsmatematemaatika ingliskeelne õppekava (üheaastane),
- matemaatika doktoriõppe kava,
- matemaatilise statistika doktoriõppe kava.

Ülikoolis oli võetud suund õppekavade arvu vähendamisele ja eriti tugeva löögi alla sattusid meie magistrikavad. Viimastel aastatel olid vastuvõtunumbrid neisse väikesed ja tuli mõelda kavade ühendamisele. Selle tulemusena läks käiku aastast 2016/17 matemaatika ja statistika magistrikava, mis võimaldab spetsialiseeruda nii matemaatikale kui matemaatilisele statistikale omades samal ajal küllalt suurt ühisosa. Selle õppekava kõrvale tekkis alates 2017/18 õppeaastast ingliskeelne kaheaastane kindlustus- ja finantsmatemaatika õppekava senise eestikeelse kaheaastase ja üheaastase ingliskeelse õppekava baasil.

Instituudi rahaline seis on keeruline. Kui teaduskonnas kattis maja haldamiskulud dekanaat, siis alates 2016. aastast tasub instituut kasutatavate ruumide eest J. Liivi tänava majas. Sellega lisandus eelarvele märgatav täiendav koormus.

Nende aastate jooksul toimus olulisi muudatusi ka koosseisudes. Emeriteerusid professorid Kalle Kaarli, Mati Kilp ja Toivo Leiger. Alates 1. jaanuarist 2016 on algebra professorina ametis Valdis Laan. Lisaks Valdisele töötavad professoritena Viktor Abramov, akadeemik Eve Oja, Arvet Pedas, Jaan Lellep, Tõnu Kollo ja Kalev Pärna. Emeriteerusid ka õpetajakoolitust vedanud dotsendid Tiit Lepmann ja Lea Lepmann. Võib öelda, et Liivi tänava maja muutus nende aastate jooksul tudengisõbralikumaks. Auditooriumide uksed on hommikust õhtuni avatud ja õppetöövälisel ajal saavad tudengid seal tegutseda, üliõpilaste neljanda korruse puhkeruumi lisandus kööginurk, kus tudengid ise korda peavad, esimesel korrusel sisustasid tudengid ise puhkenurga. Samas jäi maja aasta-aastalt tudengitele ja töötajatele kitsamaks – arvutiteaduse tudengite arv kasvas kiiresti ja nii sündis ülikoolis otsus uue IT maja ehitamiseks. Kahe aasta pärast peaks õppetöö algama juba Narva maanteel uues majas, mis on saanud endale nimeks DELTA ja kuhu kolivad lisaks arvutiteaduse instituudile ka matemaatika ja statistika instituut ning majandusteaduskond

Matemaatika, statistika ja arvutiteaduse kõrval on ka muud meeldejäävat. Olgu siin tehtud viide muusikale. Pärast sõda töötas mõne aja Olaf Prinitsa eestvõttel matemaatikute laulukoor. 2013. aasta informaatikute jõulupeol esines selle instituudi töötajate minikoor, mis järgmisel aastal juba tudengite ja matemaatikute-statistikutega täiendatuna esines teaduskonna aktustel. Dirigent oli oma majast võtta – arvutiteaduse doktorant Sven Aller oli Muusikaakadeemia lõpetanud ning suutis koorile selgeks õpetada 2015. aasta üldlaulupeo laulud, nii et laulupeorongkäigus sai täieõigusliku osavõtjana marssida ka Tartu Ülikooli Matemaatika-informaatikateaduskonna segakoor.

Kaitstud doktoritööd

Tartu Ülikool

Erge Ideon – "Rajaülesannete lahendamine ratsionaalsplainidega kollokatsioonimeetodil". Juhendaja dots. Peeter Oja (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Jaan Janno (Tallinna Tehnikaülikool) ja Natalja Budkina (Riia Tehnikaülikool). Kaitstud 26.06.2013.

Esta Kägo – "Pragudega elastsete astmeliste plaatide omavõnkumised". Juhendaja prof. Jaan Lellep (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Aleksander Klauson (Tallinna Tehnikaülikool) ja prof. Jevgeni Barkanov (Riia Tehnikaülikool. Läti). Kaitstud 28.08.2013.

Elena Safiulina – "Paralleelsed ja semiparalleelsed ruumisarnased madalamõõtmelised alammuutkonnad pseudoeukleidilises ruumis". Juhendaja emeriitprof. Ülo Lumiste (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Vanya Mirzoyan (Armeenia Riiklik Tehnikaülikool, Armeenia) ja emeriitdots. Kaarin Riives–Kaagjärv (Eesti Maaülikool). Kaitstud 19.12.2013.

Boriss Vlassov – "Astmeliste plaatide optimiseerimine siledate voolavuspindade korral". Juhendaja prof. Jaan Lellep (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Karoly Jarmai (Miskolci Ülikool, Ungari) ja prof. Rimantas Kacianauskas (Vilniuse Gediminase Tehnikaülikool, Leedu). Kaitstud 25.11.2013.

Kerli Orav–Puurand – "Keskosa interpolatsioonil po hinevad meetodid no rgalt singulaarsete integraalvo rrandite lahendamiseks". Juhendajad: prof. Arvet Pedas (Tartu Ülikool) ja akadeemik, emeriitprof. Gennadi Vainikko (Tartu Ülikool). Oponendid: emeriitprof. Rainer Kress (Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Georg-August-Universität Göttingen, Saksamaa) ja prof. Alastair Spence (Bathi Ülikool, Inglismaa). Kaitstud 17.12.2014.

KAIDO LÄTT – "Singulaarsed murrulised diferentsiaalvõrrandid ja südamlikud Volterra integraaloperaatorid". Juhendajad: prof. Arvet Pedas (Tartu Ülikool) ja akadeemik, emeriitprof. Gennadi Vainikko (Tartu Ülikool). Oponendid: juhtivteadur Andi Kivinukk (Tallinna Ülikool) ja prof. Igor Podlubny (Košice Tehnikaülikool, Slovakkia). Kaitstud 25.06.2015.

OLEG KOŠIK – "Kategoorne ekvivalents algebras". Juhendaja emeriitprof. Kalle Kaarli (Tartu Ülikool). Oponendid: Erkko Lehtonen (Lissaboni Ülikool, Portugal) ja prof. Peeter Puusemp (Tallinna Tehnikaülikool). Kaitstud 25.06.2015.

KATI AIN – "Ruumide ℓ_p poolt defineeritud kompaktsus ja nulljadad". Juhendaja akadeemik prof. Eve Oja (Tartu Ülikool). Oponendid: dotsent Hans-Olav Johannes Tylli (Helsingi Ülikool, Soome) ja prof. Dirk Werner (Berliini Vaba Ülikool, Saksamaa). Kaitstud 26.06.2015.

HELLE HALLIK – "Ratsionaalsplainidega histopoleerimine". Juhendaja dotsent Peeter Oja (Tartu Ülikool). Oponendid: Natalja Budkina (Riia Tehnikaülikool, Läti) ja prof. Jaan Janno (Tallinna Tehnikaülikool). Kaitstud 26.06.2015.

JOHANN LANGEMETS – "Diameeter-2 omadusega Banachi ruumide geomeetriline struktuur". Juhendajad: vanemteadur Rainis Haller (Tartu Ülikool) ja prof. Olav Kristian Gunnarson Dovland (Agderi Ülikool, Norra). Oponendid: prof. Ginés López Pérez (Granada Ülikool, Hispaania) ja vanemteadur Jarno Talponen (Ida–Soome Ülikool, Soome). Kaitstud 25.08.2015.

MD RAKNUZZAMAN – "Mittekommutatiivse Galois laiendi lähenemine ternaarsele Grassmanni algebrale ja gradueeritud q-diferentsiaalalgebrale". Juhendaja prof. Viktor Abramov (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Alexandre Luis Trovon de Carvalho (Parana Riiklik Ülikool, Brasiilia) ja prof. Sergei Silvestrov (Mälardaleni Ülikool, Rootsi). Kaitstud 24.08.2016.

Alexander Liyvapuu – “Pragudega elastsete astmeliste kaarte omavõnkumised”. Juhendaja prof. Jaan Lellep (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Rimantas Kacianauskas (Vilniuse Gediminase Tehnikaülikool, Leedu) ja prof. Aleksander Klauson (Tallinna Tehnikaülikool). Kaitstud 24.08.2016.

Julia Polikarpus – “Elastsete-plastsete telgsümmeetriliste plaatide analüüs ja optimeerimine”. Juhendaja prof. Jaan Lellep (Tartu Ülikool). Oponendid: emeriitprof. Niels Olhoff (Aalborgi Ülikool, Taani) ja prof. Juha Paavola (Aalto Ülikool, Soome). Kaitstud 09.11.2016.

Tallinna Tehnikaülikool

Ardo Illaste – “Molekulaarsete liikumiste analüüs südamelihasrakkudes”. Juhendaja Marko Vendelin (Tallinna Tehnikaülikool). Oponendid: Pasi Tavi (Ida–Soome Ülikool, Soome), Allen Kaasik (Tartu Ülikool). Kaitstud 23.02.2012

Tatjana Tamberg – “Mõnedest lõplike 2-rühmade klassidest ja nende endomorfismipoolrühmadest”. Juhendaja prof. Peeter Puusemp (Tallinna Tehnikaülikool). Oponendid: prof. Markku Niemenmaa (Oulu Ülikool, Soome) ja prof. Kalle Kaarli (Tartu Ülikool). Kaitstud 09.05.2012.

Priidik Lagemaa – “Operatiivne prognoos Eesti merealadel”. Juhendaja prof. Jüri Elken (Tallinna Tehnikaülikool). Oponendid: Frank Janssen (Saksamaa Föderaalne Hüdroloogia ja Meresõiduamet) ja Aarne Männik (Eesti Meteoroloogia ja Hüdroloogia Instituut). Kaitstud 25.04.2012.

Andrei Errapart – “Fotoelastsustomograafia lineaarses ja mittelineaarses lähenduses”. Juhendaja: Hillar Aben (Tallinna Tehnikaülikool). Oponendid: prof. Emmanuel Gdoutos (Demokritose nimeline Traakia Ülikool, Kreeka) ja Jonathan Williams (*NSG Group*, Suurbritannia). Kaitstud 25.05.2012.

Mari Kalda – "Ühe südameraku mehaanoenergeetika". Juhendajad: Marko Vendelin (Tallinna Tehnikaülikool) ja Pearu Peterson (Tallinna Tehnikaülikool). Oponendid: prof. Alf Månsson (Linné Ülikool, Rootsi) ja Steven Niederer (*Kings College London*, Inglismaa). Kaitstud 10.12.2015.

Kairi Kasemets – "Hetk- ja integraaltingimustega pöördülesanded paraboolsetele integrodiferentsiaalvõrranditele". Juhendaja prof. Jaan Janno (Tallinna Tehnikaülikool). Oponendid: prof. Mykola Ivanchov (Ivan Franko nimeline Riiklik Lvivi Ülikool, Ukraina) ja dotsent Uno Hämarik (Tartu Ülikool). Kaitstud 21.06.2016.

Edith Soosaar – "Jõevee levik rannikumeres Riia lahe näitel". Juhendajad: prof. Urmas Raudsepp (Tallinna Tehnikaülikool) ja prof. Robert D. Hetland (*Texas A& M University*, USA). Oponendid: Andreas Lehmann (Helmholtzi Ookeaniuuringute Keskus, Saksamaa) ja vanemteadur Aarne Männik (Tartu Ülikool). Kaitstud 21.06.2016.

Martin Laasmaa – "Südametalituse uuringud fluorestsentsi ja elektrofüsioloogiliste mõõtmiste abil". Juhendaja Marko Vendelin (Tallinna Tehnikaülikool). Kaasjuhendajad: Pearu Peterson (Tallinna Tehnikaülikool) ja Rikke Birkedal Nielsen (Tallinna Tehnikaülikool). Oponendid: prof. William Edward Louch (Oslo Ülikool, Norra) ja prof. Pasi Tavi (Ida–Soome Ülikool, Soome). Kaitstud 14.12.2016.

Eesti Maaülikool

Mirjam Vallas – "Piima laapumisomaduste modelleerimine ja geneetiline determineeritus". Juhendajad: Elli Pärna, prof. Kalev Pärna ja Tanel Kaart. Oponent Mauro Penasa (Padova Ülikool, Itaalia). Kaitstud 27.06.2013.

Ülikoolide lõpetajad

2013

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (matemaatika)

1. Rauni Lillemets
2. Raido Paas – *cum laude*
3. Ülo Reimaa

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (matemaatiline statistika)

1. Tatjana Iljašenko
2. Silva Kasela – *cum laude*
3. Riho Klement
4. Kristi Läll
5. Marja–Liisa Roos
6. Rauno Viin

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (finants- ja kindlustusmatemaatika)

1. Frazier Henry Carsten
2. Givi Kupatadze
3. Babalwa Mehlomakulu
4. Vassili Mušnikov
5. Kädi Mägi
6. Anni Niidumaa
7. Liivika Tee
8. Agris Vaselāns – *cum laude*

Tartu Ülikool, haridusteaduse magister (matemaatikaõpetaja)

1. Kaarel Joala
2. Kairi Karlson
3. Signe Reidla

Tallinna Tehnikaülikool, loodusteaduse magister, tehniline füüsika

1. Irina Georgievskaya
2. Alan Kalda – *cum laude*
3. Martin Lints – *cum laude*
4. Laur Peedu
5. Hans Tiismus

Tallinna Ülikool, matemaatika magister

1. Svetlana Hutnjak

Tallinna Ülikool, magistriõpe, matemaatikaõpetaja

1. Taavi Bekker
2. Meeli Haljand
3. Anni Mehide
4. Mari Puhang

Tartu Ülikool, bakalaureuseõpe, matemaatika

1. Galina Bogdanova
2. Märten Heinsalu
3. Jekaterina Izotova
4. Kaile Kasepuu
5. Rain Kask
6. Annika Koovit
7. Teele Laas
8. Merili Liivoja
9. Karin Lillo
10. Kätlin Loit
11. Indrek Loolaid
12. Priit Lätt
13. Inger–Helen Maadik
14. Kaia Malberg
15. Liina Muru
16. Riina Org
17. Kärt Päll
18. Kristiina Rahkema
19. Gerda Rakaselg
20. Ksenia Rozhinskaya – *cum laude*
21. Ave Räni
22. Mai Simson

Tartu Ülikool, bakalaureuseõpe, matemaatiline statistika

1. Gertis Aru
2. Paavo Binsol
3. Cliona Georgia Dalberg
4. Ingi Einaste
5. Astrid Haas
6. Kristi Helekivi – *cum laude*
7. Reigo Hendrikson
8. Getter Kallasmaa
9. Kristjan Kokorev
10. Tõnis Korts
11. Maarja Lepamets
12. Maarja Maarjakõiv
13. Kaspar Märtens – *cum laude*
14. Rauno Näksi
15. Liis Ojokas
16. Fanny–Dhelia Pajuste
17. Helis Puksand
18. Tanel Pärnamaa – *cum laude*
19. Joosep Raudsik
20. Nora Roosileht
21. Madli Rööp
22. Angela Sahk
23. Erik Salm
24. Joonas Sova
25. Liis Starkopf
26. Jaak Sõnajalg
27. Edwart Ždanovitš
28. Tõnis Tasa
29. Ragnar Vent

Tallinna Tehnikaülikool, bakalaureuseõpe, tehniline füüsika

1. Katrin Kaur
2. Lenart Kivistik
3. Rainer Klein
4. Aarne Lees
5. Mairi Leirost
6. Joosep Link
7. Mari–Liis Lippmaa
8. Ingvar Lukas
9. Heidi Mang
10. Siiri Mägi
11. Talvi Pihl
12. Juhan Saaring
13. Mihkel Tiganik
14. Johan Viirok
15. Tõnis Väli

Tallinna Ülikool, bakalaureuseõpe, matemaatika

1. Alesja Grišel
2. Marili Ilisson
3. Kadri Kaldma
4. Anni Kingsepp
5. Madis Loorents
6. Karolin Margens
7. Kairi Nurk
8. Jaanika Peebu
9. Kaarel Piip
10. Birgit Puntso
11. Auli Reitel
12. Lagle Sammelsaar
13. Agne Seli
14. Roosi Väli

2014

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (matemaatika)

1. Julia Martsinkevitš – *cum laude*
2. Heiki Niglas – *cum laude*

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (matemaatiline statistika)

1. Maarja Kruuse
2. Kairiin Kütt
3. Kaido Lepik – *cum laude*
4. Anu Tensing

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (finants- ja kindlustusmatemaatika)

1. Janika Aan
2. Natalja Joutsi
3. Margot Kase
4. Silja Paju
5. Triin Teesalu
6. Taavi Unt – *cum laude*

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (finantsmatemaatika)

1. Miguel Cuevas Urosa
2. Natalja Joutsi
3. Margot Kase
4. Anna Klavina
5. Kapil Sharma
6. Martynas Trepeka
7. Maryna Tverdostep

Tartu Ülikool, haridusteaduse magister (matemaatikaõpetaja)

1. Allar Aav
2. Kristi Orgmets
3. Riina Soon

Tallinna Tehnikaülikool, loodusteaduse magister (tehniline füüsika)

1. Mirko Mustonen
2. Olga Orlova – *cum laude*
3. Elli Valla – *cum laude*

Tallinna Ülikool, magistriõpe, matemaatika

1. Kristina Halturina
2. Marianna Jaanimägi
3. Helena Lauer
4. Kristina Tomberg
5. Joosep Vaikma

Tallinna Ülikool, magistriõpe, matemaatikaõpetaja

1. Jevgenia Meškenaite
2. Allar Pärn
3. Riin Saar
4. Kadi Sihv
5. Viktoria Mironovitš

Tartu Ülikool, bakalaureuseõpe, matemaatika

1. Anne Borkmann
2. Galina Brokan
3. Rihhard Nadel
4. Merilin Ollema
5. Tuuli Puhkim
6. Mailis Rannaveer – *cum laude*
7. Vootele Rõtov
8. Kristina Šabunova
9. Jaana Tõnisson
10. Liina Uurman

Tartu Ülikool, bakalaureuseõpe, matemaatiline statistika

1. Maia Arge
2. Kristin Jesse
3. Kaidi Jõgi
4. Jaanika Karp
5. Ann–Mari Koppel
6. Karili Kuslap
7. Matvei Mirošnikov
8. Gea Pajula
9. Kai Sarv
10. Liina Tamme
11. Kristi Tüli

Tallinna Tehnikaülikool, bakalaureuseõpe, tehniline füüsika

1. Ardo Allik – *cum laude*
2. Kirill Amelin
3. Martin Kaldoja – *cum laude*
4. Kaia Kalev
5. Uku Kaljund
6. Oliver Lõo
7. Laura Orgo – *cum laude*
8. Siim Pajusaar
9. Matt Rammo
10. Mart Ratas – *cum laude*
11. Robert Roosalu
12. Kätlin Tiigi
13. Tauno Tiirats
14. Kees Vanamölder
15. Sirli Veermäe
16. Sten Vili

Tallinna Ülikool, bakalaureuseõpe, matemaatika

1. Katrin Aas
2. Grete Akenpärg
3. Liisa Ellermaa
4. Kadri Kolk
5. Liisu Jallai
6. Artur Noorlind
7. Kersti Rajamets
8. Kaisa Raud
9. Merlin Ööpik
10. Kerli Humal
11. Gerli Laaniste
12. Jelena Nesterova
13. Mattis Kirsipuu

2015

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (matemaatika)

1. Anna Marita Laanemaa
2. Artur Lenbaum
3. Priit Lätt – *cum laude*
4. Margit Ojaots
5. Riina Org
6. Tauri Viil

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (matemaatiline statistika)

1. Mark Gimbutas – *cum laude*
2. Kristi Helekivi
3. Ethel Maasing
4. Kaspar Märtens
5. Tanel Pärnamaa – *cum laude*
6. Joosep Raudsik
7. Madli Rööp
8. Joonas Sova

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (finants- ja kindlustusmatemaatika)

1. Paavo Binsol
2. Cliona Georgia Dalberg
3. Astrid Haas
4. Kristjan Kokorev
5. Liis Kolberg
6. Inger–Heler Maadik
7. Liina Muru
8. Helis Puksand
9. Kärt Päll
10. Erik Salm
11. Salome Tabagari

Tartu Ülikool, haridusteaduse magister (matemaatika- ja informaatikaõpetaja)

1. Annika Hansalu
2. Kätlin Ingi
3. Mari–Liis Jaansalu
4. Külli Kallas
5. Anna Marita Laanemaa – *cum laude*
6. Heidi Carolina Martinsaari
7. Karina Piirimaa
8. Merlin Saulep
9. Merilin Säde
10. Tauri Viil

Tallinna Tehnikaülikool, loodusteaduse magister (tehniline füüsika)

1. Katrin Kaur
2. Mart Kukk
3. Alexander Leitmäe
4. Maris Poroson – *cum laude*
5. Märt Umbleja – *cum laude*
6. Johan Viirok – *cum laude*
7. Rene Väli – *cum laude*

Tallinna Ülikool, magistriõpe, matemaatikaõpetaja

1. Katrin Kookmaa
2. Roosi Helde
3. Pilleriin Vessik
4. Madis Loorents
5. Marili Ilisson
6. Auli Reitel
7. Karolin Margens
8. Jana Kunder
9. Raido Paas

Tartu Ülikool, bakalaureuseõpe, matemaatika

1. Anu Ahven
2. Diana–Katry Kornis
3. Annabell Kuldmaa
4. Kerttu Lääne
5. Iiris Lüsi
6. Heleri Melsas
7. Johannes Must
8. Marite Rammo
9. Nele Rosenberg
10. Kristo Visk

Tallinna Tehnikaülikool, bakalaureuseõpe, tehniline füüsika

1. Merili Eeron
2. Reelika Kaupmees – *cum laude*
3. Taavet Kollo
4. Riho Markna
5. Marten Pärg – *cum laude*
6. Silver Savi
7. Andreas Türk
8. Robert Võeras

Tallinna Ülikool, bakalaureuseõpe, matemaatika

1. Liia Petrova
2. Kristina Vecherkovskaya
3. Birgit Luht
4. Piia Rootslane
5. Maarit Kukk
6. Liisi Kerik
7. Angela Talvi
8. Anna Zahharova
9. Liina Otti
11. Carolina Kala
12. Krista Penjam
13. Laura Johanson
14. Thea Albin

2016

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (matemaatika)

1. Märten Heinsalu
2. Britt Kalam
3. Rihhard Nadel
3. Ksenia Niglas
4. Katriin Pirk

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (matemaatiline statistika)

1. Maia Arge
2. Reigo Hendrikson
3. Jaak Sõnajalg
4. Kristi Tüli

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (finantsmatemaatika)

1. Mohammad Jamsher Ali
2. Satrajit Mandal
3. Tevfik Can Özay

Tartu Ülikool, loodusteaduse magister (finants- ja kindlustusmatemaatika)

1. Keiu Kriit
2. Mailis Metsalu
3. Annegrete Peek
4. Tuuli Puhkim
5. Nora Roosileht
6. Lagle Sammelsaar
7. Kristjan Sirge
8. Janika Smirnov
9. Liina Uurman

Tartu Ülikool, haridusteaduste magister (matemaatikaõpetaja)

1. Kadi Alanurm
2. Merle Tuulas

Tartu Ülikool, haridusteaduste magister (matemaatika- ja informaatikaõpetaja)

1. Kerttu Kruusma
2. Kerri Gertrud Vestberg

Tallinna Tehnikaülikool, loodusteaduse magister (tehniline füüsika)

1. Joosep Link
2. Oliver Lõo
3. Mart Ratas – *cum laude*
4. Maria Saladina – *cum laude*

Tallinna Ülikool, magistriõpe, matemaatikaõpetaja

1. Gerli Laaniste
2. Elo Reinik
3. Kadri Lill
4. Karin Tensing

Tartu Ülikool, bakalaureuseõpe, matemaatika

1. Getriin Aaviste
2. Rasmus Erlemann
3. Tanel Kipper
4. Laura Kruusmann
5. Anna Laaneväli
6. Margus Lillemäe
7. Paul Meerits
8. Dagmar Nurges
9. Sten Mattias Oksaar
10. Andre Ostrak – *cum laude*
11. Dairis Püvi
12. Ravel Riik
13. Terttu Tammaru
14. Taisi Telve
15. Tiivi Toom
16. Janno Veeorg – *cum laude*
17. Kristo Väljako

Tartu Ülikool, bakalaureuseõpe, matemaatiline statistika

1. Sille Habakukk
2. Enelin Haviko
3. Birgit Kadastik
4. Risto Korb
5. Oskar Kärmas
6. Merli Mändul
7. Lisbeth Neevits
8. Grete Ojala
9. Hannula–Katrin Pandis
10. Mats Ploompuu
11. Hanna Pook
12. Siim Viigand

Tallinna Tehnikaülikool, bakalaureuseõpe, tehniline füüsika

1. Ainar Levandi
2. Sten Remmelg – *cum laude*
3. Riho Rästa
4. Hans Sokk
5. Sander Tomson
6. Märt Vaha
7. Risto Vessart
8. Daniil Vili

Tallinna Ülikool, bakalaureuseõpe, matemaatikaõpetaja

1. Laura Saage
2. Art–Mihkel Tedrema
3. Aet Ardel
4. Teele Puhlov
5. Merili Sagar
6. Pille–Riin Aja
7. Kädi–Liis Hunt
8. Cätlyn Klais
9. Jennie Rammo
10. Diana Krivtsova
11. Mait Maddisson
12. Egle Ollo
13. Aigi Soots
14. Eliise Kõva

Kroonika

Eesti Matemaatika Seltsi tegevus

21. jaanuar 2013	EMSi juhatuse koosolek Tartus
9. märts 2013	EMSi üldkoosolek ja KMÜ talvepäev Tartus (Miina Härma gümnaasiumis)
2. oktoober 2013	EMSi juhatuse koosolek Tartus
7. detsember 2013	Prof. Gerhard Rägo 121. sünniaastapäevale pühendatud aktus Tartus
27. jaanuar 2014	EMSi juhatuse koosolek Tartus
15. märts 2014	EMSi üldkoosolek ja KMÜ seminar Tallinna Ülikoolis
25.–27. juuni 2014	XIV Eesti Matemaatika Päevad Kopra talus Viljandimaal (TÜ, Kalle Kaarli, Rainis Haller)
29. september 2014	EMSi juhatuse koosolek Tartus
13. detsember 2014	Prof. Gerhard Rägo 122. sünniaastapäevale pühendatud aktus Tartus
5. veebruar 2015	EMSi juhatuse koosolek Tartus
21. märts 2015	EMSi üldkoosolek ja KMÜ talvepäev Tartu Ülikoolis
16. aprill 2015	EMSi juhatuse koosolek Tartus
30. september 2015	EMSi juhatuse koosolek Tartus
5. detsember 2015	Prof. Gerhard Rägo 123. sünniaastapäevale pühendatud aktus Tartus
29. jaanuar 2016	EMSi juhatuse koosolek Tartus
12. märts 2016	EMSi üldkoosolek ja KMÜ talvepäev Tallinna Tehnikaülikoolis

26.–28. juuni 2016	XV Eesti Matemaatika Päevad Luhtre turismitalus Raplamaal (TTÜ, Otu Vaarmann, Gert Tamberg)
3. detsember 2016	Prof. Gerhard Rägo 124. sünniaastapäevale pühendatud aktus Tartus

Koolimatemaatika Ühenduse tegevus

17. veebruar 2013	Matemaatikaõpetajate aktiivi infopäev Tartus Hugo Treffneri Gümnaasiumis
28. märts 2013	Känguru võistlus
6.–7. aprill 2013	Matemaatikaolümpiaadi lõppvoor Tartus
27. aprill 2013	NUPUTA lõppvoor Rõuge Põhikoolis
13.–15. august 2013	KMÜ suvepäevad Saaremaa Ühisgümnaasiumis
11. oktoober 2013	KMÜ seminar "Eksamid. Tasemetöö. Ainekava." Tallinna Reaalkoolis
12. oktoober 2013	KMÜ seminar "Eksamid. Tasemetöö. Ainekava." Tartus Hugo Treffneri Gümnaasiumis
1.–2. nov. 2013	40. matemaatikaõpejate päevad Ülenurme Gümnaasiumis Tartumaal
8.–9. märts 2014	Matemaatikaolümpiaadi lõppvoor Tartus
27. märts 2014	Känguru võistlus
26. aprill 2014	NUPUTA lõppvoor Viljandi Paalalinna Koolis
17.–18. okt. 2014	41. matemaatikaõpejate päevad Paide Gümnaasiumis
21. oktoober 2014	KMÜ teabepäev "Ainekava ja riigieksamid" Tallinnas Inglise Kolledžis

21. oktoober 2014	KMÜ koolitus gümnaasiumiõpetajatele “Arvuteooria ja algebra” Tallinna Reaalkoolis. Lektor Maksim Ivanov.
5. november 2014	KMÜ koolitus põhikooliõpetajatele “Planimeetria ja olümpiaad” Tallinna Reaalkoolis. Lektor Elts Abel.
14. november 2014	KMÜ koolitus põhikooliõpetajatele “Planimeetria ja olümpiaad” Tartus Hugo Treffneri Gümnaasiumis. Lektor Elts Abel.
15. november 2014	KMÜ teabepäev “Ainekava ja riigieksamid” Tartus Hugo Treffneri Gümnaasiumis
26. märts 2015	Känguru võistlus
4.–5. aprill 2015	Matemaatikaolümpiaadi lõppvoor Tartus
25. aprill 2015	NUPUTA lõppvoor Jüri Gümnaasiumis
17.–19. august 2015	KMÜ suvepäevad Palamusel Jõgevamaal
26. september 2015	Matemaatika lahtine võistlus
22. oktoober 2015	KMÜ teabepäev Tallinna Reaalkoolis
31. oktoober 2015	KMÜ teabepäev Tartus Hugo Treffneri Gümnaasiumis
13.–14. nov. 2015	42. matemaatikaõpetajate päevad Viimsi Keskkoolis Harjumaal
13. detsember 2015	Matemaatika lahtine võistlus
30. jaanuar 2016	Vabariikliku matemaatikaolümpiaadi piirkonnavoor
17. veebruar 2016	NUPUTA eelvoor maakondades
17. märts 2016	Känguru võistlus
2.–3. aprill 2016	Matemaatikaolümpiaadi lõppvoor Tartus
23. aprill 2016	Nuputa lõppvoor Rapla Ühisgümnaasiumis

23. september 2016	Õpetajate Lehes ilmub matemaatikaõpetajate avalik kiri seoses 6. klassi tasemetööga matemaatikas
21.–27. okt. 2016	Matemaatikaõpetajate kogemuste jagamise reis Gruusiasse
11.–12. nov. 2016	43. matemaatikaõpetajate päevad Rapla Ühisgümnaasiumis

Lisaks sellele on KMÜ-ga seotud järgmised tegemised:

- 4.–6. klassi matemaatikaolümpiaad,
- õppeprotsesside kirjelduste koostamine,
- konkurss e-õppematerjalide loomiseks kolmel teemal,
- õppekava tutvustav koolitustuur maakondades,
- koostöö Tartu Ülikooli, Tallinna Ülikooli, Tallinna Tehnikaülikooli, SA Innove, Õpetajate Ühenduste Koostöökojaga.

Konverentsid, seminarid

- 18. rahvusvaheline konverents "*Mathematical Modelling and Analysis*" ja 4. rahvusvaheline konverents "*Approximation Methods and Orthogonal Expansions*" (MMA2013 & AMOE2013). Konverents oli pühendatud professor Gennadi Vainikko 75. sünnipäevale. 27.–30.05.2013, Tartu. Osavõtjate arv 135.
- Rahvusvaheline konverents "*International Conference on Topological Algebras and their Applications*" (ICTAA 2013). Konverents oli pühendatud professor Mati Abeli 70. sünnipäevale. 30.05.–02.06.2013, Tartu. Osavõtjaid 27.
- Rahvusvaheline konverents "*Optimization and Analysis of Structures*" (OAS2013). 25.–27.08.2013, Tartu.

- Rahvusvaheline konverents "*Kangro-100. Methods of Analysis and Algebra*". Konverents oli pühendatud professor Gunnar Kangro 100. sünniaastapäevale. 01.–06.09.2013, Tartu.
- Seminar "*Algebra ja tema rakendused*", 26.–28.04.2013, Väiko-Härmä küla, Võru maakond. Osavõtjaid 23.
- Eesti matemaatika ja statistika doktorikooli finantsmatemaatika kevadkool Kääriku Spordikeskuses, Valga maakond, 17.–19.05.2013.
- Eesti matemaatika ja statistika doktorikooli seminar koolimatemaatika probleemidest, 14.03.2013, Tartu.
- Eesti matemaatika ja statistika doktorikooli Statistika talvekool "Matemaatiliste mudelite rakendused" Pühajärvel, 20.–21.12.2013.
- Eesti Statistikaseltsi 26. konverents "Statistikast ja elust". Konverents oli pühendatud emeriitprofessor Ene–Margit Tiidu 80. sünnipäevale. 21.04.2014, Tartu. Osavõtjaid 110.
- Eesti matemaatika ja statistika doktorikooli suvekool Pihla Päevad XI, 06.–09.06.2014, Saaremaal. Osavõtjaid 18.
- Rahvusvaheline konverents "*10th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*" (ICCA10), 04.–09.08.2014, Tartu. Osavõtjaid 78.
- Rahvusvaheline konverents "*Baltic-Nordic-Ukrainian Workshop in Survey Statistics*", 24.–28.08.2014, Tallinn. Osavõtjaid 50.
- Soome–Eesti doktorikoolide ühine stohhastikaseminar "*Stochastic Visit Workshop of the FDPSS*", 11.–12.09.2014, Tartu. Osavõtjaid 18.
- Seminar "Algebra ja tema rakendused", 25.–27.04.2014, Änkküla, Jõgeva maakond, 25 osavõtjat.

- Eesti matemaatika ja statistika doktorikooli kevadkool, 23.–25.05.2014, Tehvandi, Valga maakond. Osavõtjaid 28.
- Eesti matemaatika ja statistika doktorikooli talveseminar "Tõenäosusteooria ja statistika aktuaalsed teemad", 18.–19.12.2014, Tartu.
- Seminar "Algebra ja tema rakendused", 08.–10.05.2015, Marguse puhkekeskus, Valga maakond. Osavõtjaid 16.
- Eesti matemaatika ja statistika doktorikooli kevadkool Pühajärvel, 22.–24.05.2015. Osavõtjaid 32.
- Rahvusvaheline konverents "*3rd International Conference Optimization and Analysis of Structures*" (OAS2015), 23.–25.08.2015. Osavõtjaid 23.
- Eesti statistikaseltsi ja statistikaameti konverents "Registrid ja suurandmed statistikas", 20.10.2015, Viljandi.
- Rahvusvaheline konverents "*Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives*", 06.–07.05.2016, Tallinna Ülikool, Tallinn.
- Rahvusvaheline konverents "*21st International Conference Mathematical Modelling and Analysis*", 01.–04.06.2016, Tartu. Osavõtjaid 72.
- Rahvusvaheline konverents "*The 10th Tartu Conference on Multivariate Statistics*", 28.06–1.07.2016, Tartu. Osavõtjaid 69.

Muud matemaatikasündmused

- Prof. Gunnar Kangro 100. sünniaastapäevale pühendatud näitus TÜ raamatukogus, 21.11.–21.12.2013, Tartu.
- Prof. Gunnar Kangro 100. sünniaastapäeva tähistamine, 23.11.2013, Tartu.

- Prof. Ülo Lumiste 85. a juubelile pühendatud seminar, 30.06.2014, Tartu.

- Teadusajakirja *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* liitumine 2014. a. maikuus andmebaasiga SCOPUS.

- Pidulik üritus "Matemaatika õpetamise metoodika kateeder – 50", 11.12.2015, 28 osalejat.

- Seoses Tartu Ülikooli valdkondliku struktuuri kehtestamisega ühines matemaatilise statistika instituut alates 01.01.2016 matemaatika instituudiga matemaatika ja statistika instituudiks.

Eesti Matemaatika Seltsi trükised

2013

1. Eve Oja, Kalle Kaarli, Alesei Lissitsin, Kristel Mikkor, Märt Põldvere, Indrek Zolk (toim.), *Kangro-100. Methods of Analysis and Algebra. Book of Abstracts*, EMS, Tartu, 2013.
2. *Mathematical modelling and analysis and approximation methods and orthogonal expansions. Abstracts of Intern. Conference*, EMS, Tartu, 2013.
3. Mati Abel, Kalle Kaarli, Toivo Leiger, *Matemaatik Gunnar Kangro 100*, TÜ ja EMS, Tartu, 2013.
4. Lea Lepmann, Tiit Lepmann, Katrin Kokk (toim.), *Koolimatemaatika XL*, TÜ ja EMS, Tartu, 2013.
5. Raili Vilt (toim.), *Känguru 2013*, TÜ teaduskool ja EMS, Tartu, 2013.
6. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* **17(1)**, TÜ ja EMS, 2013.
7. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* **17(2)**, TÜ ja EMS, 2013.

2014

1. Mart Abel (toim.), *Proceedings of the International conference on topological algebras and their applications ICTAA 2013. Math. Studies 6*, EMS, Tartu, 2014.
2. Hannes Jukk, Terje Hõim (toim.), *Koolimatemaatika XLI*, TÜ ja EMS, Tartu, 2014.
3. Raili Vilt (toim.), *Känguru 2014*, TÜ teaduskool ja EMS, Tartu, 2013.

4. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* **18(1)**, TÜ ja EMS, 2014.

5. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* **18(2)**, TÜ ja EMS, 2014.

2015

1. Elts Abel, Mati Abel, Maksim Ivanov, *Ülevirumaalised matemaatikavõistlused 2010–2014*, EMS, Tartu 2015.

2. Katrin Kokk, Terje Hõim (toim.), *Koolimatemaatika XLII*, TÜ ja EMS, Tartu, 2015.

3. Raili Vilt (toim.), *Känguru 2015*, TÜ teaduskool ja EMS, Tartu, 2013.

4. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* **19(1)**, TÜ ja EMS, 2015.

5. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* **19(2)**, TÜ ja EMS, 2015.

2016

1. *Mathematical modelling and analysis. Abstracts of Intern. Conference*, EMS, Tartu, 2016.

2. Terje Hõim, Sirje Pihlap (toim.), *Koolimatemaatika XLIII*, EMS, Tartu, 2016.

3. Raili Vilt (toim.), *Känguru 2016*, TÜ teaduskool ja EMS, Tartu, 2013.

4. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* **20(1)**, TÜ ja EMS, 2015.

5. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* **20(2)**, TÜ ja EMS, 2015.

Eesti Matemaatika Seltsi üritused

EMSi üldkoosolek ja KMÜ talvepäev 09.03.2013

EMSi üldkoosolek ja KMÜ talvepäev toimusid Tartus, Miina Härma Gümnaasiumis. Üldkoosolekul osales 25 seltsi liiget ja koosolekut juhatas prof. KALLE KAARLI.

Ajakava:

11.00–12.55 EMSi üldkoosolek

11.00 Registreerumine

11.15 Seltsi presidendi aruanne juhatuse tegevustest 2012. a. (RAUL KANGRO)

11.30 KMÜ esimehe aruanne KMÜ 2012. a. tegevustest (HELE KIISEL)

11.45 Seltsi finantsaruanne (Raul Kangro)

11.55 Revisjonikomisjoni aruanne (MATI ABEL). Finantsaruande ja revisjonikomisjoni aruande kinnitamine

12.05 2012. a. EMSi üliõpilaspreemia pälvinud töö tutvustus (INDREK ZOLK)

12.15 EMSi publikatsiooniauhinna pälvinud töö tutvustus (KAIDO LÄTT)

12.30 Info arvutipõhise statistikahariduse projektist, diskussioon

12.45 Info käesoleva aasta üritustest

12.55–13.15 Vaheaeg

13.15–15.15 KMÜ talvepäev

- IB (*International Baccalaureate*) õppekava Miina Härma Gümnaasiumis ja õppematerjalide tutvustus
- Ringkäik koolimajas
- Riigieksamist
- Rahvaloenduse tulemustest (ENE–MARGIT TIIT)

EMSi üldkoosolek ja KMÜ seminar 15.03.2014

EMSi üldkoosolek ja KMÜ talvepäev toimusid Tallinna Ülikoolis. Üldkoosolekul osales 83 seltsi liiget ja koosolekut juhatas MADIS LEPIK.

Ajakava:

10.00–12.10 Koolimatemaatika ühenduse seminar "Matemaatika e-materjalid"

10.00 Kirjastus Koolibri oma matemaatika e-materjalidest

10.30 Kirjastus Avita oma matemaatika e-materjalidest

11.00 Vaheaeg

11.10 e-Math projekti raames loodud e-materjalidest

11.40 Matemaatika riigieksamist (DEIVI TAAL)

12.10–13.00 Lõunapaus ja TLÜ uute õppehoonete tutvustus

12.30–15.00 EMSi üldkoosolek

12.30 Registreerimine koosolekule.

13.00 EMSi juhatuse tegevuse aruanne 2013 (RAUL KANGRO).

13.15 Seltsi finantsaruanne (Raul Kangro). Revisjonikomisjoni aruanne (MATI ABEL). Finantsaruande kinnitamine

13.30 KMÜ juhatuse tegevuse aruanne 2011–2013 (HELE KIISEL)

13.50 KMÜ uue juhatuse ja esimehe valimine

14.10 Üliõpilaspreemia laureaadi lühiettekanne oma tööst (KSENIA ROZHINSKAYA)

14.20 EMSi publikatsiooniauhinna pälvinud töö tutvustus (ALEKSEI LISSITSIN)

14.35 Valimistulemuste kinnitamine

14.40 Info Eesti Matemaatika Päevadest (Raul Kangro). Täiendavad sõnavõtud.

KMÜ juhatusse valiti Helen Kaasik, Inna Toovis, Esta Erit, Anne Aasamets, Raili Vilt, Tiiu Kaljas, Urve Pärnamaa, Margit Nuija, Mare Vahtramäe, Hele Kiisel.

EMSi üldkoosolek ja KMÜ talvepäev 21.03.2015

EMSi üldkoosolek ja KMÜ talvepäev toimusid Tartus, Tartu Ülikooli J. Liivi tänava õppehoones. Üldkoosolekul osales 27 seltsi liiget ja koosolekut juhatas Madis Lepik.

Ajakava:

9.45–11.55 EMSi üldkoosolek

9:45 Registreerumine

10.00 EMSi juhatuse tegevuse aruanne 2012–2014 (Raul Kangro)

10.15 EMSi juhatuse finantsaruanne (Raul Kangro)

10.25 Revisjonikomisjoni aruanne (Mati Abel)

10.30 Finantsaruande kinnitamine

10.35 KMÜ tegevuse aruanne 2014 (Hele Kiisel)

10.45 Uue presidendi, juhatuse liikmete, auliikmete, revisjonikomisjoni ja häältelugemiskomisjoni liikmete kandidaatide ülesseadmine

11.15 Valimised, häältelugemise ajal: EMSi üliõpilaspreemia saanud töö tutvustus (Rihhard Nadel)

11.45 Valimistulemuste väljakuulutamine ja kinnitamine

11.50 Uue presidendi lühisõnavõtt

Kohvipaus 11.55–12.30

12.30–14.30 KMÜ talvepäev

12.30 Tallinna Tehnikaülikooli sisseastumiseksamist

12.50 Tallinna Ülikooli sisseastumistingimustest

13.10 Muudatustest matemaatika õpetamises esmakursuslastele Tartu Ülikoolis

13.30 Kokkuvõte toimunud õpilasvõistlustest ja KMÜ edasiste tegevuste planeerimine

Valimiste tulemused:

Eesti Matemaatika Seltsi presidendiks valiti Valdis Laan.

Eesti Matemaatika Seltsi juhatuse liikmeteks valiti Rainis Haller, Hannes Jukk, Helen Kaasik, Raul Kangro, Andi Kivinukk, Madis Lepik, Indrek Zolk, Gert Tamberg ja Raili Vilt.

Eesti Matemaatika Seltsi revisjonikomisjoni liikmeteks valiti Mati Abel, Tiit Lepmann ja Mart Oja.

Eesti Matemaatika Seltsi auliikmeteks valiti Elts Abel, Kalle Kaarli, Andi Kivinukk, Erna Laanpere ja Aita Raudsepp.

EMSi üldkoosolek ja KMÜ talvepäev 12.03.2016

EMSi üldkoosolek ja KMÜ talvepäev toimusid Tallinnas, Tallinna Tehnikaülikooli Arnold Humala nimelises auditooriumis. Üldkoosolekul osales 30 seltsi liiget ja koosolekut juhatas Andi Kivinukk.

Ajakava:

11.00–12.55 EMSi üldkoosolek

11:00 Registreerumine

11.15 Ene–Margit Tiidu sõnavõtt seoses Arnold Humala preemiaga

11.20 Seltsi presidendi aruanne juhatuse tegevustest 2015. a. (Valdis Laan)

11.30 KMÜ esimehe aruanne KMÜ 2015. a. tegevustest (Hele Kiisel)

11.45 Seltsi finantsaruanne (Raul Kangro)

11.55 Revisjonikomisjoni aruanne (Mati Abel). Finantsaruande ja revisjonikomisjoni aruande kinnitamine

12.05 EMSi põhikirja muutmine KMÜ kajastamiseks seltsi põhikirjas (Hele Kiisel)

12.15 Seltsi auliikmete tunnustamine

12.20 2015. a. EMS üliõpilaspreemia pälvinud töö tutvustus (Ago–Erik Riet)

12.30 EMSi publikatsiooniauhinna pälvinud töö tutvustus (Lauri Tart)

12.45 Info käesoleva aasta üritustest

12.55–13.45 Lõuna TTÜ majandusteaduskonna söököklas

13.45–15.45 KMÜ talvepäev

13.45 Eesti Matemaatika Selts 90 (Mati Abel)

14.15 Malest ja matemaatikast (Rein Ruus)

15.00 TTÜ Innovatsiooni- ja ettevõtluskeskuse Mektory külastus (Kristina Piliste)